Dipartimento di Ingegneria “Enzo Ferrari”
Corso di Campi Elettromagnetici - a.a. 2014/15

Appello del 22/6/2015 - Soluzioni

Soluzioni ai quesiti

Esercizio 1

Domanda di teoria, si vedano il testo e gli appunti delle lezioni.

Esercizio 2

Domanda di teoria, si vedano il testo e gli appunti delle lezioni.

Esercizio 3

I campi elettrici $\overline{\mathcal{E}_1}$ ed $\overline{\mathcal{E}_2}$ possono essere scritti nel dominio del tempo nelle forma:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}_1}(x,t) &= E_{10}cos(\omega_1 t - \beta_1 x + \phi_1)\,\hat{z} \quad V/m\\ \overline{\mathcal{E}_2}(x,t) &= E_{20}cos(\omega_2 t - \beta_2 x + \phi_2)\,\hat{j} \quad V/m\end{aligned}$$

Dove è possibile sostituire direttamente:

$$\begin{aligned}\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 100\pi\cdot 10^6 \quad 1/s & \qquad \omega_1 = 2\pi\nu_1 = 50pi\cdot 10^6 \quad 1/s\\ \beta_1 = \frac{\omega_1\sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{100\pi\cdot 10^6\cdot 3}{3\cdot 10^8} = \pi \quad 1/m & \qquad \beta_2 = \frac{\omega_2\sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{50\pi\cdot 10^6\cdot 3}{3\cdot 10^8} = \frac{\pi}{2} \quad 1/m\\ E_{10} = 5 \quad mV/m & \qquad E_{20} = 2 \quad mV/m\end{aligned}$$

Dalle informazioni sui punti di massimo si deduce immediatamente $\phi_1 = 0$. ϕ_2 si ricava uguagliando a 0 l'argomento del coseno per $x = 0$, $t = 0.03\,\mu s$:

$$50\pi\cdot 10^6\cdot 0.03\cdot 10^{-6} + \phi_2 = 0$$

$$\phi_2 = -\frac{3}{2}\pi$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}_1}(x,t) &= 5\,cos(100\pi\cdot 10^6\,t - \pi\,x)\,\hat{z} \quad V/m\\ \overline{\mathcal{E}_2}(x,t) &= 2\,cos(50\pi\cdot 10^6\,t - \frac{\pi}{2}\,x - \frac{3}{2}\pi)\,\hat{j} \quad V/m\end{aligned}$$

Il campo elettrico totale è dato dalla somma vettoriale di $\overline{\mathcal{E}_1}$ e $\overline{\mathcal{E}_2}$:

$$\overline{\mathcal{E}}(x,t) = 5\,cos(100\pi\cdot 10^6\,t - \pi\,x)\,\hat{z} \;+\; 2\,cos(50\pi\cdot 10^6\,t - \frac{\pi}{2}\,x - \frac{3}{2}\pi)\,\hat{j}$$

Sostituendo $x = 40$ cm, $t = 0.03\,\mu s$ si ottiene:

$$\overline{\mathcal{E}} = 5\,cos(100\pi\cdot 10^6\cdot 0.03\cdot 10^{-6} - \pi\cdot 0.4)\,\hat{z} \;+\; 2\,cos(50\pi\cdot 10^6\cdot 0.03\cdot 10^{-6} - \frac{\pi}{2}\cdot 0.4 - \frac{3}{2}\pi)\,\hat{j}$$

$$\overline{\mathcal{E}} = 1.618\,\hat{j} - 1.545\,\hat{z} \quad mV/m$$

Infine si ricavano modulo e direzione:

$$\begin{aligned}|\overline{\mathcal{E}}| &= \sqrt{0.1.618^2 + 1.545^2} = 2.237 \quad mV/m\\ \hat{e} &= \frac{\overline{\mathcal{E}}}{|\overline{\mathcal{E}}|} = \frac{1.618\,\hat{j} - 1.545\,\hat{z}}{2.237} = 0.723\,\hat{j} - 0.691\,\hat{z} \qquad (a)\end{aligned}$$

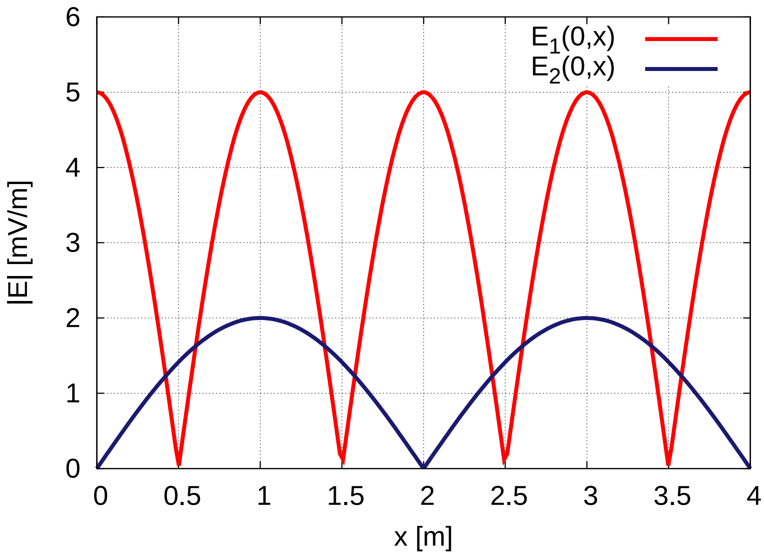
Il vettore complesso rappresentativo dell'onda 2 è:

$$\overline{E}_2(x) = 2\, e^{-j(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2})}\, \hat{j} \quad mV/m$$

Essendo l'impedenza intrinseca del mezzo $\eta = 377/3 = 125.67\Omega$ si ottiene:

$$\overline{H}_2(x) = \frac{1}{\eta}\hat{i} \times \overline{E}_2(x) = 15.9\, e^{-j(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2})}\, \hat{z} \quad \mu A/m \qquad (b)$$

Il grafico richiesto al punto (c) è il seguente:



Esercizio 4

L'impedenza di carico normalizzata vale $z_L = 1.5 - j1$. L'impedenza di ingresso normalizzata è pertanto:

$$z_i = \frac{z_L cos(\beta l) + j sin(\beta l)}{cos(\beta l) + j z_L sin(\beta l)}$$

Dove $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, pertanto:

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{(1.5 - j1)cos(\frac{\pi}{3}) + j sin(\frac{\pi}{3})}{cos(\frac{\pi}{3}) + j(1.5 - j1)sin(\frac{\pi}{3})} = ... = \\ z_i &= 0.42 - j0.13 \end{aligned}$$

Da cui $Z_L = (21 - j6.5)\,\Omega$ (a).
Il corrispondente coefficiente di riflessione vale:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \frac{z_i - 1}{z_i + 1} = \frac{0.42 - j0.13 - 1}{0.42 - j0.13 + 1} = ... \\ \rho_i &= -0.398 - j0.128 \qquad (b) \end{aligned}$$

Esercizio 5

Dai dati forniti è possibile leggere direttamente sulla carta di Smith il valore dell'impedenza di ingresso normalizzata, che vale $z_i = 0.85 + j1.35$. Poichè la lunghezza d'onda sulla linea vale

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 500 \cdot 10^6} = 15\, cm$$

l'impedenza di carico si trova con una rotazione antioraria di un angolo corrispondente a $5.9/15\lambda = 0.393\lambda$, mentre il ROS è dato dall'intersezione della circonferenza a $|\rho|$ costante con l'asse delle impedenze reali. Si hanno:

$$\begin{aligned} Z_L &= 75 \cdot (3 - j1.6) = (225 - j120)\,\Omega \qquad (a) \\ ROS &= 3.95 \qquad (b) \end{aligned}$$

Sempre operando sulla carta di Smith è possibile trovare le distanze a cui posizionare gli adattatori, trovando i punti sulla circonferenza a $|\rho|$ costante con impedenza reale. Ottenuta l'impedenza di ingresso in tali punti, si porcede all'adattamento con una rete di impedenza caratteristica $Z_0' = \sqrt{(Z_0^2 \cdot z_i)}$. Si ricava che Ã¨ possibile adattare il carico

- con una rete $\lambda/4$ di impedenza caratteristica $Z_0' = 37.5\ \Omega$ a una distanza di 3.4 cm dal carico, oppure
- con una rete $\lambda/4$ di impedenza caratteristica $Z_0' = 149\ \Omega$ a una distanza di 7.15 cm dal carico (c)

Esercizio 6

Il fattore di schiera vale:

$$\left| \sum_i a_i exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} d\, cos\theta \right) \right|^2$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} F_a(\theta) &= \left| 1 + 3\, exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{6} cos\theta \right) \right|^2 \\ &= \left| 1 + 3\, e^{\frac{\pi}{6}\, cos\theta} \right|^2 = (1 + 3\, e^{\frac{\pi}{6}\, cos\theta}) 1 + 3\, e^{-\frac{\pi}{6}\, cos\theta} \\ &= 1 + 3\, e^{\frac{\pi}{3} cos\theta} + 3e^{-\frac{\pi}{3} cos\theta} + 9 \\ &= 10 + 6\, cos\left(\frac{\pi}{3} cos\theta \right) \qquad (a) \end{aligned}$$

La direzione di massimo si ottiene per $cos\theta = 0$, cioè $\theta = \pi/2 + k\pi$ (b).

Esercizio 7

Non essendo indicato il rendimento dell'antenna, possiamo supporre D=G e ricavare il valore del guadagno direttamente dall'area efficace:

$$G = \frac{4\pi A_{eff}}{\lambda^2} = \frac{4\pi \cdot 1600}{0.73^2} = 37626 = 45.75\, dB \qquad (a)$$

Dalla formula di trasmissione di Friis, espressa in dB, si ricava:

$$\begin{aligned} P_R &= EIRP + G_{R,dB} + 20\, Log\left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right) \\ EIRP_{min} &= P_{R,min} - G_{dB} - 20\, Log\left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right) \\ EIRP_{min} &= -204\, dBm - 45.75\, dB - 20\, Log\left(\frac{0.73}{4\pi\, 2.11 \cdot 10^{19}} \right) \\ EIRP_{min} &= -204, dBm - 45.75\, dB + 411.2\, dB \\ EIRP_{min} &= 161.4\, dBm = 131.4\, dBW \qquad (b) \end{aligned} \tag{1}$$

essendo $R = 2240 \cdot 9.45 \cdot 10^{15}\, m = 2.11 \cdot 10^{19}\, m$.