Dipartimento di Ingegneria “Enzo Ferrari”
Corso di Campi Elettromagnetici - a.a. 2015/16

Appello del 18/1/2016 - Soluzioni

Soluzioni ai quesiti - testo “A”

Esercizio 1

Domanda di teoria - si veda testo.

Esercizio 2

Testo “A” - frequenza 200 MHz

La lunghezza d'onda vale:

$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot \nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2.533} \cdot 200 \cdot 10^6} = 0.942\, m \qquad (a)$$

Il vettore complesso rappresentativo del campo elettrico si scrive come:

$$\overline{E} = E_0\, e^{-j\beta x} \hat{\jmath}$$

con E_0 fornito e β ricavato da

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.942} = 6.67\ m^{-1}$$

Da cui:

$$\overline{E} = 2\, e^{-j6.67x} \hat{\jmath}\ mV/m \qquad (b)$$

Per ricavare il vettore di Poynting è necessario calcolare il campo magnetico $\overline{H}$. Rammentando che:

$$\overline{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \overline{E}$$

con

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = 377 \frac{1}{\sqrt{2.533}} = 236.9\ \Omega$$

si ha

$$\overline{H} = \frac{1}{236.9} \cdot 2\, e^{-j6.67x} (\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) = 8.4 \cdot 10^{-3}\, e^{j6.67x}\, \hat{z}\ mA/m$$

Infine:

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \frac{1}{2} \overline{E} \times \overline{H} \\ \overline{S} &= \frac{1}{2} \left[2\, e^{-j6.67x} \hat{\jmath} \right] \times \left[8.4 \cdot 10^{-3}\, e^{-j6.67x} \hat{z} \right] \\ \overline{S} &= 8.4 \cdot 10^{-3} \hat{\imath}\ \mu W/m^2 \qquad (c) \end{aligned} \qquad (1)$$

Esercizio 3

Testo “A” - carico $Z_L = (100 - j50)\ \Omega$

Si ricava immediatamente il coefficiente di riflessione al carico:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$$

sostituendo $z_L = Z_L/Z_0 = 2 - j$:

$$\begin{aligned}\rho_L &= \frac{2-j-1}{2-j+1} \\ &= \frac{1-j}{3-j}\cdot\frac{3+j}{3+j} \\ &= \frac{3-3j+j+1}{9+1} = \frac{4-2j}{10} \\ &= 0.4 - 0.2j\end{aligned}$$

da cui

$$|\rho_L| = \sqrt{0.4^2+0.2^2} = 0.447 \qquad \psi = \angle\rho_L = arctg\left(\frac{-0.2}{0.4}\right) = -0.464\ rad$$

Il ROS vale quindi

$$ROS = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} = \frac{1+0.447}{1-0.447} = 2.62 \qquad (a)$$

Le impedenze massime e minime osservate lungo la linea valgono:

$$\begin{aligned}Z_{min} = \frac{Z_0}{ROS} &= \frac{50}{2.62} = 19.1\ \Omega \\ Z_{max} = Z_0 \cdot ROS &= 50 \cdot 2.62 = 131\ \Omega\end{aligned}$$

La distanza dal carico a cui è osservata l'impedenza minima è in relazione con la fase del coefficiente di riflessione ρ_L come:

$$\psi - 2\beta l_{min} = -\pi$$

da cui:

$$l_{min} = \frac{\psi+\pi}{2\beta} = \frac{\psi+\pi}{2}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{-0.447+\pi}{4\pi}\lambda = 0.214\lambda$$

Il punto a impedenza massima si trova a $\lambda/4$ da quello a impedenza minima, quindi:

$$l_{max} = (0.214 + \frac{1}{4})\lambda = 0.464\lambda$$

Rammentando che le impedenze sulla linea sono periodiche con periodo $\lambda/2$:
$Z_{min} = 19.1\ \Omega$ a $l_{min} = 0.214\lambda + N\lambda/2$ dal carico e $Z_{max} = 131\ \Omega$ a $l_{min} = 0.464\lambda + N\lambda/2$ dal carico (b).
Gli adattatori vanno collocati nei punti a impedenza minima o massima, pertanto l'adattamento si realizza con:

- impedenza $\sqrt{Z_{min}\cdot Z_0} = \sqrt{19.1\cdot 50} = 30.9\ \Omega$ a $0.214\lambda + N\lambda/2$ dal carico, oppure
- impedenza $\sqrt{Z_{max}\cdot Z_0} = \sqrt{131\cdot 50} = 80.9\ \Omega$ a $0.464\lambda + N\lambda/2$ dal carico (c).

Alternativamente, è possibile ricavare le risposte ai quesiti utilizzando la carta di Smith.

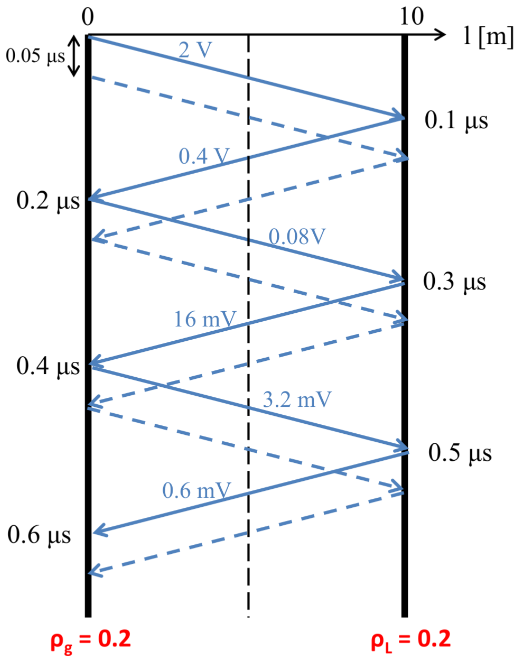
Esercizio 4

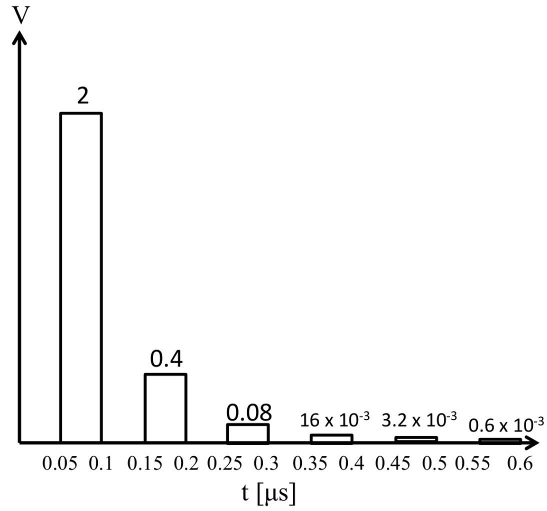
Testo "A" - impedenza generatore 75 Ω, carico 75 Ω

Dai dati forniti si ricavano immediatamente:

$$\begin{aligned}\rho_G = \rho_L &= \frac{75-50}{75+50} = 0.2 \\ V_i = \frac{v_g Z_0}{R_g + Z_0} &= \frac{5\ \cdot\ 50}{75+50} = 2\ V \\ \tau = \frac{\sqrt{\epsilon_r} l}{c} &= \frac{\sqrt{9}\ \cdot\ 10}{3\cdot 10^8} = 0.1\ \mu s\end{aligned}$$

Trattandosi di un impulso di durata finita, è opportuno graficare nel diagramma a rimbalzo i fronti di salita (linea continua) e discesa (linea tratteggiata). I grafici richiesti sono i seguenti:





Esercizio 5

Testo "A" - lunghezza 5 cm, frequenza 100 MHz

La lunghezza d'onda vale

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^8} = 3\ m$$

con cui è possibile ricavare i risultati richiesti:

$$\begin{aligned}
A_{eff} = \frac{\lambda^2 \cdot D}{4\pi} &= \frac{3^2 \cdot 1.5}{4\pi} = 1.07\ m^2 \qquad (a) \\
R_{rad} = \frac{2}{3}\pi\eta_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 &= \frac{2}{3}\pi \cdot 377 \left(\frac{0.05}{3}\right)^2 = 0.22\ \Omega \qquad (b) \\
P_{rad} = \frac{1}{2} R_{rad} I_0^2 &= \frac{1}{2} 0.22 \cdot 10^2 = 11\ W \qquad (c)
\end{aligned}$$

Esercizio 6

Applicando il metodo di piazzamento degli zeri, il problema si risolve individuando i coefficienti di un polinomio complesso che si annulla per:

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{j\pi cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -0.91 + j0.40 \\
z_2 &= e^{j\pi cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1 \\
z_3 &= e^{j\pi cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -0.91 - j0.40
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
p(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\
&= (z + 0.91 - j0.40)(z - 1)(z + 0.91 + j0.40) \\
&= \ldots \\
&= z^3 + 0.82z^2 - 0.82z - 1
\end{aligned}$$

pertanto i coefficienti richiesti sono: $a_0 = -1$, $a_1 = -0.82$, $a_2 = 0.82$, $a_3 = 1$. Il grafico del fattore di schiera corrispondente è riportato in Fig. 1

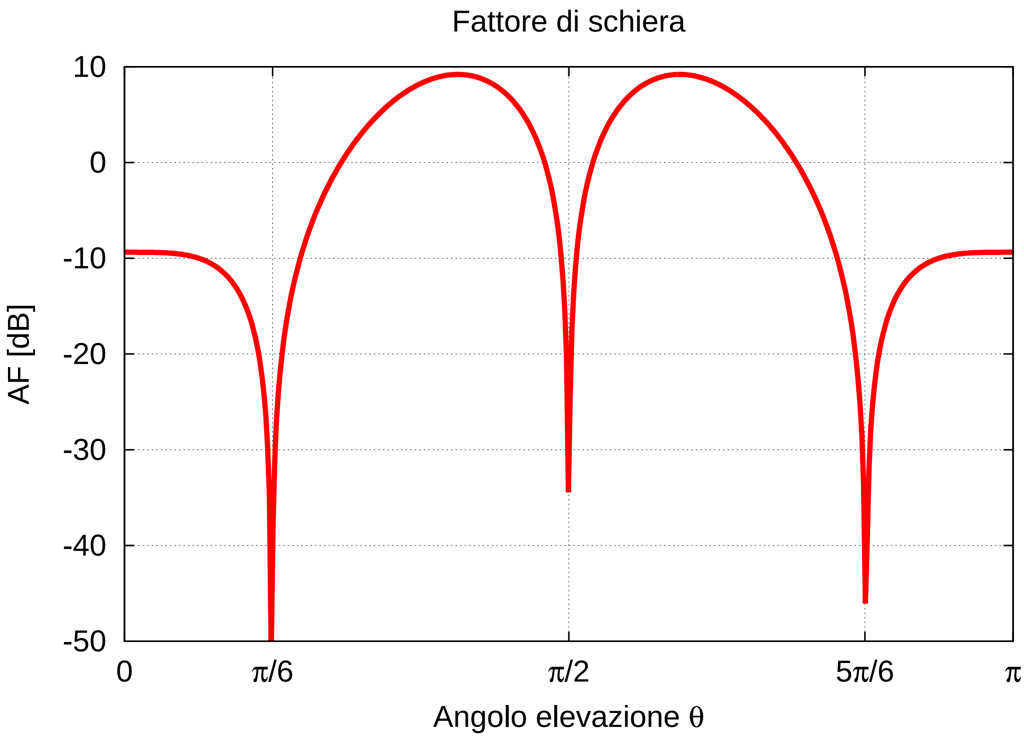


Figura 1: Fattore di schiera relativo all'esercizio 6.

Esercizio 7

Testo "A" - distanza bersaglio 300 km

Invertendo la formula del radar (monostatico):

$$P_R = \frac{P_T G_T^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}$$

si ricava il guadagno d'antenna

$$G_T = \sqrt{\frac{P_{R,min}(4\pi)^3 R^4}{P_T \lambda^2 \sigma}} = \sqrt{\frac{10^{-11} \cdot (4\pi)^3 (100 \cdot 10^3)^4}{100 \cdot 10^3 \cdot 0.02^2 1.5}} = 181860 = 52.4\ dB \qquad (a)$$

dove si sono sostituiti $\lambda = c/\nu = 0.02$ m e $P_{R,min} = 10^{-11}$ W.
La potenza che il ricevitore osserva dopo la riflessione su un bersaglio di sezione radar 10 m^2 distante 300 km è:

$$P_R = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot (1.81 \cdot 10^5)^2 \cdot 0.02^2 \cdot 10}{(4\pi)^3 \cdot (300 \cdot 10^3)^4} = 8.25 \cdot 10^{-12}\ W$$

che è minore della minima potenza necessaria (b).

Soluzioni ai quesiti - testo "B"

Esercizio 1

Domanda di teoria - si veda testo.

Esercizio 2

Testo "B" - frequenza 250 MHz

(a) $\lambda = 0.754\, m$;
(b) $\overline{E} = 2\, e^{-j8.33x}\, \hat{j}\; mV/m$;
(c) $\overline{S} = 8.4 \cdot 10^{-3}\, \hat{i}\; mW/m^2$.

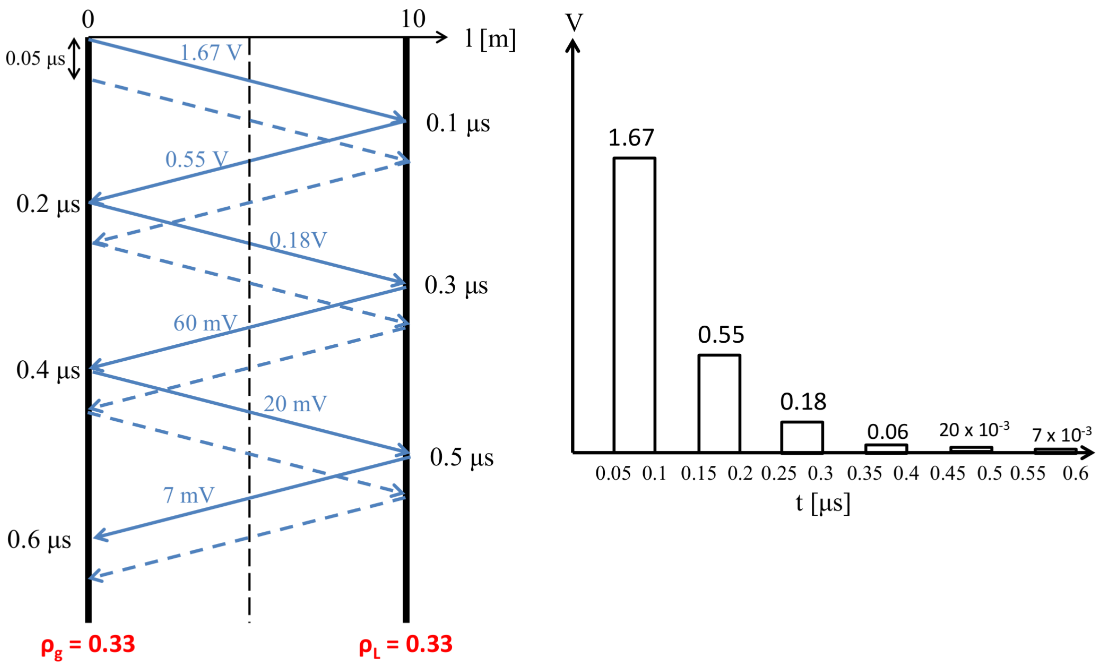
Esercizio 3

Testo "B" - $Z_L = (100 + j50)\ \Omega$

(a) ROS $= 2.62$;
(b) $Z_{min} = 19.1\ \Omega$ a 0.0365λ dal carico, $Z_{max} = 131\ \Omega$ a 0.2865λ dal carico;
(c) Adattatore $\lambda/4$ con impedenza caratteristica 31 Ω a 0.0365λ dal carico oppure 81 Ω a 0.2865λ dal carico.

Esercizio 4

Testo "A" - impedenza generatore 100 Ω, carico 100 Ω



Esercizio 5

Testo "B" - lunghezza 2.5 cm, frequenza 50 MHz

(a) $A_{eff} = 1.9\ m^2$
(b) $R_{rad} = 0.014\ \Omega$
(c) $P_{rad} = 0.7\ W$.

Esercizio 6

Si veda Testo "A"

Esercizio 7

Testo "B" - (b) distanza 150 km

(a) si veda testo "A";
(b) sì.