Dip. di Ingegneria “Enzo Ferrari”
Corso di Campi Elettromagnetici - a.a. 2014/15

Prima Prova Parziale - Soluzioni

Esercizio 1

Domanda di teoria. Si veda capitolo 3 del testo.

Esercizio 2

Versione 1 - Linea in c.c. La tensione sulla linea (assumendo la sezione di carico in $l = 0$) vale:

$$V(l) = V_+ e^{-j\beta l} + V_- e^{j\beta l}$$

Poichè $V_- = \rho_L V_+$ e $\rho_L = -1$ nella linea cortocircuitata, l'espressione precedente diventa:

$$V(l) = V_+(e^{-j\beta l} - e^{j\beta l}) = -j2V_+ sin(\beta l)$$

Sostituendo $\beta = 2\pi/\lambda$ si ottiene:

$$V(l) = -j2V_+ sin(2\pi \frac{l}{\lambda})$$

che vale 0 in $l = -(k + 1/2)\frac{\lambda}{2}$.

Versione 2 - Linea in c.a. La tensione sulla linea (assumendo la sezione di carico in $l = 0$) vale:

$$V(l) = V_+ e^{-j\beta l} + V_- e^{j\beta l}$$

Poichè $V_- = \rho_L V_+$ e $\rho_L = 1$ nella linea in circuito aperto, l'espressione precedente diventa:

$$V(l) = V_+(e^{-j\beta l} + e^{j\beta l}) = 2V_+ cos(\beta l)$$

Sostituendo $\beta = 2\pi/\lambda$ si ottiene:

$$V(l) = 2V_+ cos(2\pi \frac{l}{\lambda})$$

che vale 0 in $l = -k\frac{\lambda}{2}$.

Esercizio 3

(a) La frequenza vale:

$$\nu = \frac{\beta c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{12.57 \cdot 3 \cdot 10^8}{2\pi\sqrt{2.25}} = 400\ MHz$$

(b) Il vettore complesso rappresentativo del campo elettrico si può calcolare come:

$$\overline{E} = \eta \overline{H} \times \hat{k}$$

con $\hat{k}$ direzione di propagazione che in questo caso coincide con $\hat{z}$. L'impedenza intrinseca del mezzo vale:

$$\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{377\Omega}{\sqrt{2.25}} = 251.3\ \Omega$$

sostituendo si ottengono direttamente le soluzioni nei due casi:

Versione 1 - $\overline{\mathbf{H}}$ lungo $\hat{\mathbf{i}}$ $\overline{E}(z) = 301.6e^{-j12.57z}(-\hat{j}) \quad \mu V/m.$

Versione 2 - $\overline{\mathbf{H}}$ lungo $\hat{\mathbf{j}}$ $\overline{E}(z) = 301.6e^{-j12.57z}(\hat{\imath}) \quad \mu V/m.$

(c) Il vettore di Poynting si ottiene direttamente dalla definizione:

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{E} \times \overline{H}^*$$

sostituendo:

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\left(301.6e^{-j12.57z}(-\hat{\jmath}) \times 1.2e^{j12.57z}(\hat{\imath})\right) \ pW/m = 180.6 \ \hat{z} \ pW/m^2$$

Esercizio 4

(a) Il mezzo ha permittività dielettrica dipendente dalla frequenza. In particolare:

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\nu_1) &= 36 \\ \epsilon_r(\nu_2) &= 25 \end{aligned}$$

Le costanti di fase β, necessarie per esplicitare le espressioni dei campi elettrici associati alle due onde, valgono:

$$\begin{aligned} \beta(\nu_1) &= \frac{\omega_1}{c/\sqrt{\epsilon_r(\nu_1)}} = 0.628m^{-1} \\ \beta(\nu_2) &= \frac{\omega_2}{c/\sqrt{\epsilon_r(\nu_2)}} = 1.047m^{-1} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \overline{E}_1(z,t) &= 30cos(2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 t - 0.628z)\hat{\imath} \ mV/m \\ \overline{E}_2(z,t) &= 40cos(2\pi \cdot 10 \cdot 10^6 t - 1.047z)\hat{\jmath} \ mV/m \end{aligned}$$

(b) Le velocità di propagazione delle due onde si ricavano direttamente:

$$\begin{aligned} v_p(\nu_1) &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r(\nu_1)}} = 0.5 \cdot 10^8 \ m/s \\ v_p(\nu_2) &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r(\nu_2)}} = 0.6 \cdot 10^8 \ m/s \end{aligned}$$

(c) Il campo elettrico totale vale:

$$\begin{aligned} \overline{E}_{tot}(5m, 50\mu s) &= \overline{E}_1(5m, 50\mu s) + \overline{E}_2(5m, 50\mu s) \\ \overline{E}_{tot}(5m, 50\mu s) &= 30cos(2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} - 0.628 \cdot 5)\hat{\imath} + 40cos(2\pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} - 1.047 \cdot 5)\hat{\jmath} \ mV/m \\ \overline{E}_{tot}(5m, 50\mu s) &= 30cos(500\pi - 3.14)\hat{\imath} + 40cos(1000\pi - 5.235)\hat{\jmath} \ mV/m \\ \overline{E}_{tot}(5m, 50\mu s) &= -30\hat{\imath} + 20\hat{\jmath} \ mV/m \end{aligned}$$

Che si esprime in termini di modulo e direzione come $\overline{E} = |\overline{E}| \cdot \hat{E}$,con

$$\begin{aligned} |\overline{E}| &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-30)^2 + 20^2} = 36.05 \ mV/m \\ \hat{E} &= \frac{\overline{E}}{|\overline{E}|} = \frac{-30\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}}{36.05} = -0.831\hat{\imath} + 0.55\hat{\jmath} \end{aligned}$$

Esercizio 5

Versione 1 - ammettenza di carico $(\mathbf{4-j8})\cdot\mathbf{10^{-3}}$. Conviene esprimere il carico come impedenza $Z_L = 1/Y_L$. Si ottiene $Z_L = (50 + j100)\Omega$. In termini normalizzati $z_L = 1 + j2$.
(a) L'impedenza normalizzata in ingresso alla linea vale:

$$z_i(-l) = \frac{z_L cos(\beta l) + j sin(\beta l)}{cos(\beta l) + j z_L sin(\beta l)}$$

E' necessario ricavare β:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu\sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{2\pi 5\cdot 10^9\sqrt{6.25}}{3\cdot 10^8} = 261.8\ 1/m$$

Da cui $\beta l = 26.18$, $cos(\beta l) = \frac{1}{2}$, $sin(\beta l) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sostituendo tutto nell'espressione dell'impedenza normalizzata si trova:

$$\begin{aligned}
z_i(-l) &= \frac{(1+j2)\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + j(1+j2)\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
z_i(-l) &= \frac{0.5 + j + j0.866}{0.5 + j0.866 - 1.732}\\
z_i(-l) &= \frac{0.5 + j1.866}{-1.232 + j0.866}\frac{-1.232 - j0.866}{-1.232 - j0.866}\\
z_i(-l) &= \frac{1 - j2.732}{2.268} = 0.441 - j1.205
\end{aligned}$$

Da cui $Z_i(-l) = Z_0 z_i(-l) = (22 - j60)\ \Omega$.

(b) Il coefficiente di riflessione vale:

$$\rho(l) = \frac{z_i(-l) - 1}{z_i(-l) + 1} = \frac{0.441 - j1.205 - 1}{0.441 - j1.205 + 1} = \cdots = 0.18 - j0.68$$

e pertanto $|\rho| = 0.703$.

(c) Si può ricavare direttamente il rapporto d'onda stazionaria:

$$ROS = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 5.73$$

Versione 2 - ammettenza di carico $(\mathbf{4+j8})\cdot\mathbf{10^{-3}}$ Conviene esprimere il carico come impedenza $Z_L = 1/Y_L$. Si ottiene $Z_L = (50 - j100)\Omega$. In termini normalizzati $z_L = 1 - j2$.
(a) L'impedenza normalizzata in ingresso alla linea vale:

$$z_i(-l) = \frac{z_L cos(\beta l) + j sin(\beta l)}{cos(\beta l) + j z_L sin(\beta l)}$$

E' necessario ricavare β:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu\sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{2\pi 5\cdot 10^9\sqrt{6.25}}{3\cdot 10^8} = 261.8\ 1/m$$

Da cui $\beta l = 26.18$, $cos(\beta l) = \frac{1}{2}$, $sin(\beta l) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sostituendo tutto nell'espressione dell'impedenza normalizzata si trova:

$$\begin{aligned}
z_i(-l) &= \frac{(1-j2)\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + j(1-j2)\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
z_i(-l) &= \frac{0.5 - j + j0.866}{0.5 + j0.866 + 1.732}\\
z_i(-l) &= \frac{0.5 - j0.134}{2.23 + j0.866}\frac{2.23 - j0.866}{2.23 - j0.866}\\
z_i(-l) &= \frac{0.999 - j0.732}{5.723} = 0.175 - j0.128
\end{aligned}$$

Da cui $Z_i(-l) = Z_0 z_i(-l) = (8.75 - j0.64)\ \Omega$.

(b) Il coefficiente di riflessione vale:

$$\rho(l) = \frac{z_i(-l) - 1}{z_i(-l) + 1} = \frac{0.175 - j0.128 - 1}{0.175 - j0.128 + 1} = \cdots = -0.684 - j0.183$$

(c) A meno dell'errore di approssimazione $|\rho|$ e ROS sono i medesimi del caso precedente.

Esercizio 6

(a) La velocità di propagazione del segnale lungo la linea si ricava dai valori di L e C come:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{-12}}} = 5 \cdot 10^7\ m/s$$

(b) Per prima cosa, è necessario calcolare l'impedenza caratteristica della linea, che vale

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}\ H/m}{200 \cdot 10^{-12}\ F/m}} = 100\ \Omega$$

Poichè l'impedenza di carico non è puramente reale, è necessario collocare l'adattatore $\lambda/4$ a una distanza opportuna dal carico, tale da annullare la parte immaginaria di Z_i. Sulla Carta di Smith, è necessaria una rotazione in verso orario sulla circonferenza a $|\rho|$ costante dal punto di carico fino a raggiungere una delle due intersezioni con l'asse delle impedenze reali.

Versione 1 - impedenza di carico $\mathbf{Z_L = (200 + j50)\ \Omega}$. L'impedenza di carico normalizzata vale $z_L = 2 + j0.5$. Dalla Carta si individuano i due punti a impedenza reale e le rispettive impedenze di ingresso:

$$d_1 = 0.024\lambda \Rightarrow Z_L' = 216\ \Omega$$
$$d_2 = 0.274\lambda \Rightarrow Z_L' = 46\ \Omega$$

Le corrispondenti impedenze caratteristiche delle linee a $\lambda/4$ sono:

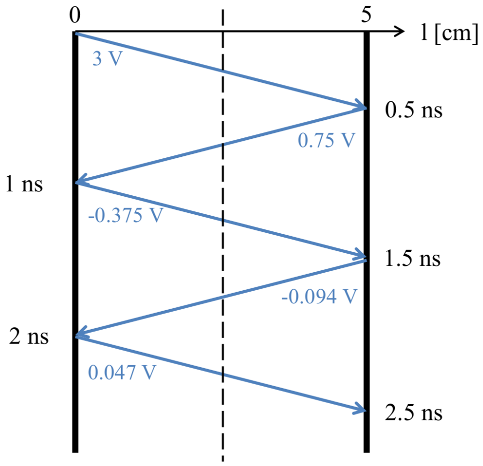
$$d_1 = 0.024\lambda \Rightarrow Z_0' = \sqrt{Z_0 Z_L'} = \sqrt{100 \cdot 216}\ \Omega = 147\ \Omega$$
$$d_2 = 0.274\lambda \Rightarrow Z_0' = \sqrt{Z_0 Z_L'} = \sqrt{100 \cdot 46}\ \Omega = 68\ \Omega$$

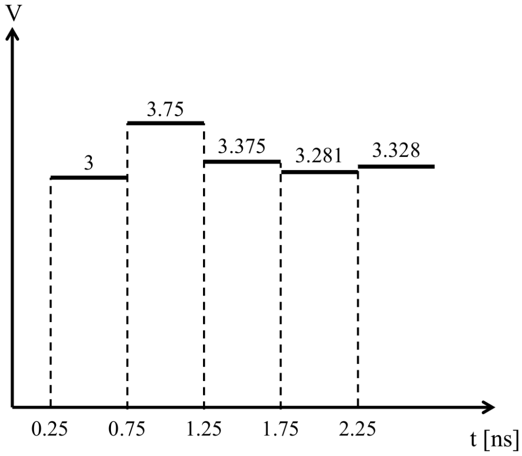
Versione 2 - impedenza di carico $\mathbf{Z_L = (200 - j50)\ \Omega}$. L'impedenza di carico normalizzata vale $z_L = 2 - j0.5$. Dalla Carta si individuano i due punti a impedenza reale e le rispettive impedenze di ingresso:

$$d_1 = 0.226\lambda \Rightarrow Z_L' = 46\ \Omega$$
$$d_2 = 0.476\lambda \Rightarrow Z_L' = 216\ \Omega$$

Le corrispondenti impedenze caratteristiche delle linee a $\lambda/4$ sono:

$$d_1 = 0.226\lambda \Rightarrow Z_0' = \sqrt{Z_0 Z_L'} = \sqrt{100 \cdot 46}\ \Omega = 68\ \Omega$$
$$d_2 = 0.476\lambda \Rightarrow Z_0' = \sqrt{Z_0 Z_L'} = \sqrt{100 \cdot 216}\ \Omega = 147\ \Omega$$





Esercizio 7

Dai dati del problema si ottengono:

$$
\begin{aligned}
V_+ &= \frac{V_g Z_0}{Z_0 + R_g} = \frac{4 \cdot 75}{75 + 25} = 3\ V \\
\rho_g &= \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{25 - 75}{25 + 75} = -\frac{1}{2} \\
\rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{125 - 75}{125 + 75} = \frac{1}{4} \\
t &= \frac{L}{v_p} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{100 \cdot 10^{6}} = 10^{8}\ m/s
\end{aligned}
$$

a partire dai quali è possibile tracciare i grafici richiesti: