Dipartimento di Ingegneria "Enzo Ferrari"
Corso di Campi Elettromagnetici - a.a. 2014/15

Appello del 8/1/2015 - Soluzioni

Primo appello completo

Esercizio 1

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0 \quad con\ \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$V(z)$: tensione (V)
R: resistenza per unità di lunghezza (Ω/m)
L: induttanza per unità di lunghezza (H/m)
G: conduttanza per unità di lunghezza (S/m)
C: capacità per unità di lunghezza (F/m).

Esercizio 2

Il fattore di schiera vale:

$$\begin{aligned}
F(\theta) &= |\sum_{i=0}^{n-1} a_i e^{jkid\ cos\theta}|^2 = \\
&= |1 + 3e^{j\frac{\lambda}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\ cos\theta}|^2 = \\
&= |1 + 3e^{j\pi\ cos\theta}|^2 = \\
&= (1 + 3e^{j\pi\ cos\theta})(1 + 3e^{-j\pi\ cos\theta}) = \\
&= 1 + 3e^{j\pi\ cos\theta} + 3e^{-j\pi\ cos\theta} + 9 = \\
&= 10 + 6cos(\pi\ cos\theta)
\end{aligned}$$

Il diagramma di radiazione della schiera vale pertanto:

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= F_a(\theta)\ F(\theta) = \\
&= sin^2(\theta)[10 + 6cos(\pi\ cos\theta)]
\end{aligned}$$

essendo $F_a(\theta) = sin^2(\theta)$ l'intensità di radiazione normalizzata del singolo dipolo hertziano.

Esercizio 3

Dai dati del problema si ricava immediatamente $\beta = 0.628$, da cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.628} = 10\ m \\
v_p &= \lambda\nu = 10 \cdot 5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^7\ m/s \qquad (a)
\end{aligned}$$

L'indice di rifrazione del mezzo in cui l'onda si propaga vale:

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6} = 6$$

pertanto l'impedenza intrinseca del mezzo è

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} = \frac{377}{6} = 62.83\ \Omega$$

Si ricava quindi il vettore complesso rappresentativo del campo magnetico:

$$\begin{aligned}
\overline{H}(z) &= \frac{1}{\eta}\hat{z} \times \overline{E}(z) \\
&= (15.9 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5)e^{-j0.628z}\hat{z} \times \hat{j} = \\
&= 24e^{-j0.628z}(-\hat{i}) \quad mA/m \qquad (b)
\end{aligned}$$

Esercizio 4

La distanza tra due minimi di tensione è pari a mezza lunghezza d'onda, pertanto $\lambda = 30$ cm (a).
Il modulo del coefficiente di riflessione si ricava dal ROS:

$$|\rho| = \frac{ROS - 1}{ROS + 1} = \frac{4}{6} = 0.667$$

mentre la fase di ρ al carico, ϕ_L, si ottiene dalla posizione del primo minimo di tensione sulla linea, e vale:

$$\phi_L = 2\beta l_{min} - \pi = 2\frac{2\pi}{\lambda} l_{min} - \pi = \cdots = \frac{\pi}{3}$$

da cui:

$$\rho_L = 0.667 e^{j\frac{\pi}{3}} = 0.333 + j0.574 \qquad (b)$$

Sulla carta di Smith, la circonferenza a $|\rho|$ costante interseca l'asse delle impedenze reali in $z_{max} = 5$ e $z_{min} = 0.2$, rispettivamente alle distanze $d_{max} = 10\ cm - \lambda/4 = 2.5\ cm$ e $d_{min} = 10\ cm$ dal carico. L'adattamento è pertanto ottenuto con:

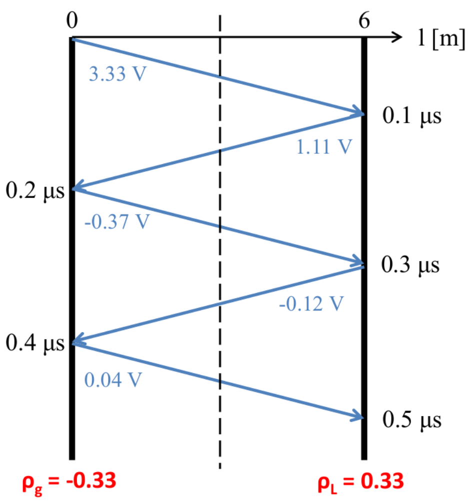
- una rete $\lambda/4$ di impedenza $\sqrt{5 \cdot 50 \cdot 50} = 111.8\ \Omega$ posta a 2.5 cm dal carico, oppure
- una rete $\lambda/4$ di impedenza $\sqrt{0.2 \cdot 50 \cdot 50} = 22.4\ \Omega$ posta a 10 cm dal carico. (c)

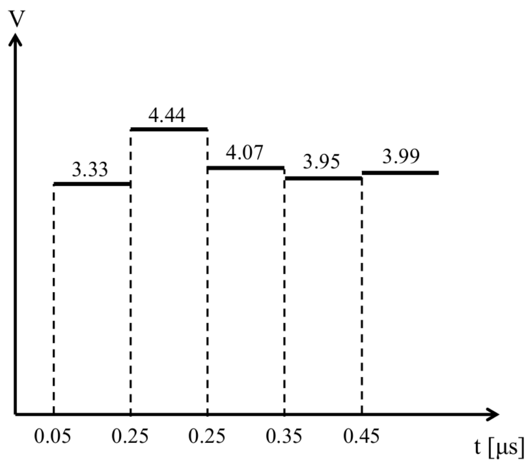
Esercizio 5

Dai dati forniti si ricavano:

$$\begin{aligned}
V_+ &= \frac{V_g Z_0}{Z_0 + R_g} = \frac{5 \cdot 50}{50 + 25} = 3.33\ V \\
\rho_g &= \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3} \\
\rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3} \\
v_p &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{25}} = 6 \cdot 10^7\ m/s \\
t &= \frac{L}{v_p} = \frac{6}{6 \cdot 10^7} = 0.1\ \mu s
\end{aligned}$$

a partire dai quali è possibile tracciare i grafici richiesti:





Esercizio 6

La potenza totale irradiata dall'antenna si ottiene integrando la densità di potenza:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} B_0 cos^3(\theta)\ d\Omega = \\
P &= \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} B_0 cos^3(\theta) sin(\theta)\ d\theta d\varphi = \\
P &= B_0 \int_{0}^{\pi/2} cos^3(\theta) sin(\theta)\ d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
P &= 2\pi B_0 \left[\frac{cos^4(\theta)}{4}\right]_0^{pi/2} = \frac{\pi B_0}{2}
\end{aligned}$$

Essendo $P = 10$ W, si ricava immediatamente $B_0 = 6.37$ W/sr.
La massima densità di potenza alla distanza di 1 km è quindi $S_{max} = \frac{6.73}{(10^3)^2} = 6.37\ \mu$W/m^2 (a).
La direttività dell'antenna vale:

$$D = \frac{4\pi R^2 S_{max}}{P} = \frac{4\pi (10^3)^2 \cdot 6.36 \cdot 10^{-6}}{10} = 8 = 9.03\ dB \qquad (b)$$

L'HPBW è delimitato dalla condizione $F(\theta_H) = cos^3(\theta_H) = 0.5$, ossia

$$cos(\theta_H) = 0.79 \Rightarrow \theta_H = arccos(0.79) = 0.66\ rad$$

Per simmetria $HPBW = 2\theta_H = 1.32\ rad = 75.6°$ (c).

Esercizio 7

La minima potenza che deve essere trasmessa si ottiene invertendo la formula del radar:

$$P_{T,min} = \frac{P_{R,min}(4\pi)^3 R^4}{G_T G_R \lambda^2 \sigma_T}$$

dai dati forniti si ricavano λ, G_T e G_R:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^9} = 0.15\ m \\
G_T = G_R &= \xi \frac{4\pi A_{eff}}{\lambda^2} = \frac{0.8\cdot 4\pi(\pi 2^2)}{0.15^2} = 5614
\end{aligned}$$

sostituendo:

$$P_{T,min} = \frac{10^{-8}\cdot (4\pi)^3 \cdot (10\cdot 10^3)^4}{5614^2 \cdot 0.15^2 \cdot 20} = 13989\ W \approx 14\ kW \qquad (a)$$

La massima distanza a cui è possibile individuare un oggetto di sezione radar 3 m^2 si ottiene invertendo nuovamente la formula del radar:

$$\begin{aligned}
R_{max} &= \left[\frac{P_T G_T G_R \lambda^2 \sigma_T}{(4\pi)^3 P_{R,min}}\right]^{1/4} = \\
&= \left[\frac{14\cdot 10^3 \cdot (5614)^2 \cdot (0.15)^2 \cdot 3}{(4\pi)^3 \cdot 10^{-8}}\right]^{1/4} = \\
&= 6225\ m \qquad (b)
\end{aligned}$$

Seconda prova parziale

Esercizio 1

Si veda Esercizio 2 prova completa.

Esercizio 2

Domanda di teoria. Si veda Cap. 9 testo.

Esercizio 3

Si veda Esercizio 6 prova completa.

Esercizio 4

L'antenna ricevente è posta nel punto di coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{1.06^2+1.06^2}\ km = 1.5\ km \\ \theta &= arctg\left(\frac{x}{z}\right) = arctg\left(\frac{1.06}{1.06}\right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

La densità di potenza decresce con R^2, pertanto il prodotto $R^2 \cdot S_{max}$ è costante. Di conseguenza:

$$S_{max}(1.5\ km) = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (10^3)^2}{(1.5 \cdot 10^3)^2} = 0.667\ mW/m^2$$

La potenza ricevuta è pertanto:

$$\begin{aligned} P &= A_{eff} S_{max} \left[\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}cos\theta\right)}{sin\theta}\right]^2 = \\ &= 2 \cdot 0.667 \left[\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{4}\right)}{sin\frac{\pi}{4}}\right]^2 = 0.52\ mW \qquad (a) \end{aligned}$$

La densità di potenza nella direzione di massimo alla distanza di 2 km è

$$S_{max}(2\ km) = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (10^3)^2}{(2 \cdot 10^3)^2} = 0.375\ mW/m^2$$

da cui la potenza ricevuta:

$$P = A_{eff} S_{max} = 2 \cdot 0.375 = 0.75\ mW \qquad (b)$$

Esercizio 5

Essendo nota la direttività del dipolo hertziano ($D = 1.78\ dB = 1.5$), l'area efficace si ricava immediatamente una volta nota la lunghezza d'onda:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{75 \cdot 10^6} = 4\ m \\ A_{eff} &= \frac{\lambda^2 D}{4\pi} = \frac{4^2 \cdot 1.5}{4\pi} = 1.91\ m^2 \qquad (a) \end{aligned}$$

La resistenza di radiazione del dipolo corto vale:

$$R_{rad} = \frac{2\pi}{3}\eta_o \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{2\pi}{3} \cdot 377 \cdot (0.018)^2 = 0.26\ \Omega \qquad (b)$$

da cui è possibile ricavare la potenza irradiata:

$$P_{rad} = \frac{1}{2} R_{rad} I_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.26 \cdot 5^2 = 3.25\ W \qquad (c)$$

Esercizio 6

Dalla formula di trasmissione di Friis:

$$G_r^{dB} = P_{R,min}^{dBW} - EIRP^{dBW} - 20\ Log\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)$$

sostituendo i dati forniti e $\lambda = (3 \cdot 10^8)/(12 \cdot 10^9) = 0.025\ m$ si trova:

$$G_r^{dB} = -80dBW - 53dBW + 205dB = 72\ dB \qquad (a)$$

La risposta al secondo quesito si ottiene in maniera analoga, introducendo il termine di attenuazione supplementare:

$$G_r^{dB} = -80\ dBW - 48\ dBW + 205\ dB + 3\ dB = 80\ dB \qquad (b)$$

Esercizio 7

Si veda Esercizio 7 prova completa.