Dipartimento di Ingegneria “Enzo Ferrari”
Corso di Campi Elettromagnetici - a.a. 2014/15

Appello del 27/1/2015 - Soluzioni

Esercizio 1

Domanda di teoria. Si veda Cap. 3 del testo.

Esercizio 2

Dai dati del problema si ricava:

$$R = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{24}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{16}{36\pi} 10^{-9}} \approx 13500 >> 1$$

per cui è possibile utilizzare le formule approssimate per un buon conduttore. Si ottengono:

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 24}{2}} = 13.77\ 1/m$$

da cui il vettore complesso rappresentativo di $\overline{E}$:

$$\overline{E}(x) = 12e^{-13.77x}e^{-j13.77x}\hat{z}\ V/m \qquad (a)$$

Per l’impedenza intrinseca vale la formula approssimata:

$$\eta_c = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} = (1+j)\frac{13.77}{24} = 0.574 + j0.574 \qquad (b)$$

Lo spessore di penetrazione vale $\delta = 1/\alpha = 7.3$ cm (c).
L’ampiezza dell’onda si attenua a 1/10 del valore iniziale quando vale $e^{-\alpha x} = 0.1$, pertanto:

$$x = \frac{ln(0.1)}{-\alpha} = \frac{ln(0.1)}{-13.77} = 16.7\ cm \qquad (d).$$

Esercizio 3

L’impedenza di ingresso normalizzata vale

$$z_i = \frac{Z_i}{Z_L} = \frac{40-70}{50} = 0.8 - j1.4.$$

La risposta ai quesiti (a), (b), (c) è ottenuta graficamente in Fig. 1(sinistra):

$$\begin{aligned} z_L &= 2 + j2 \\ ROS &= 4.25 \\ |\rho| &= 0.623 \\ \theta = \angle\rho &= arctg\left(\frac{\Im(\rho)}{\Re(\rho)}\right) = 0.51\ rad \approx \pi/6\ rad \end{aligned}$$

Le condizioni di adattamento mediante uno stub in parallelo sono ottenute graficamente dalla carta delle ammettenze in Fig. 1(destra):

- con una linea in c.c. di lunghezza $l_1 = 0.41\lambda$ a distanza $d_1 = 0.364\lambda$ dal carico, oppure
- con una linea in c.c. di lunghezza $l_2 = 0.09\lambda$ a distanza $d_2 = 0.22\lambda$ dal carico.

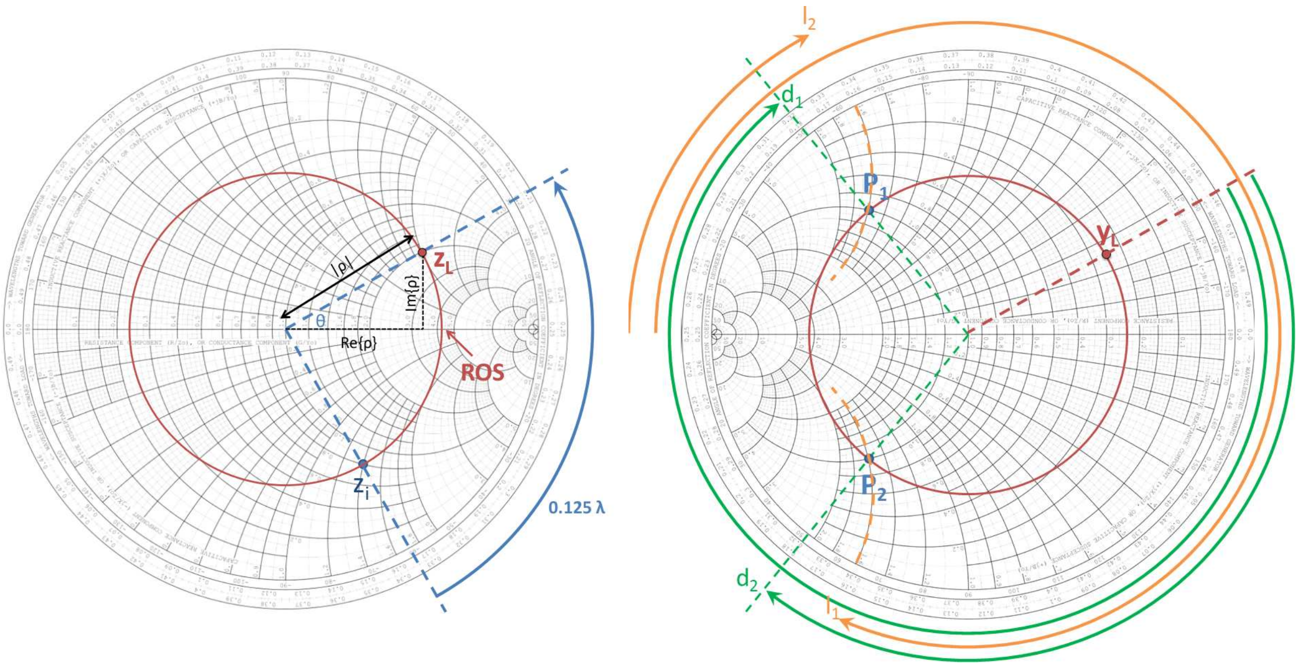

Figura 1: Risoluzione grafica dell'esercizio 3.

Esercizio 4

Dai dati forniti si ricavano:

$$
\begin{aligned}
V_+ &= \frac{V_g Z_0}{Z_0 + R_g} = \frac{10 \cdot 100}{100 + 75} = 5.71\ V \\
Z_L &= \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)^{-1} = 25\ \Omega \\
\rho_g &= \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{75 - 100}{75 + 100} = -\frac{1}{7} \\
\rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{25 - 100}{25 + 100} = -\frac{3}{5} \\
v_p &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{16}} = 7.5 \cdot 10^7\ m/s \\
t &= \frac{L}{v_p} = \frac{15 \cdot 10^{-2}}{7.5 \cdot 10^7} = 2\ ns
\end{aligned}
$$

a partire dai quali è possibile tracciare i grafici richiesti, riportati in Fig. 2.

Esercizio 5

La direzione di massima radiazione si ottiene per $cos^2(2\theta) = 1$, cioè $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ (a).
L'HPBW è data da:

$$
\begin{aligned}
cos^2(2\theta) &= \frac{1}{2} \\
cos(2\theta) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
2\theta &= \frac{\pi}{4} \\
\theta &= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

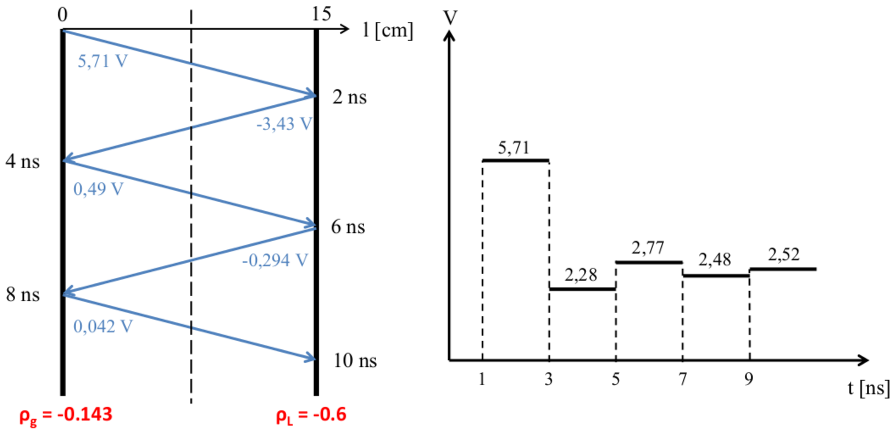

Figura 2: Soluzione dell'esercizio 4.

Per simmetria rispetto all'asse z, si ha $HPBW = \frac{\pi}{4}$ (b).
Per ricavare la potenza emessa è necessario integrare la densità di radiazione:

$$
\begin{aligned}
P &= R^2 S_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} cos^2(2\theta) sin\theta d\theta d\phi = \\
&= 2\pi R^2 S_0 \int_0^{\pi/2} cos^2(2\theta) sin\theta d\theta d\phi = \\
&= 2\pi R^2 S_0 \int_0^{\pi/2} cos(2\theta) cos(2\theta) sin\theta d\theta d\phi = \\
&= 2\pi R^2 S_0 \int_0^{\pi/2} (cos^2\theta - sin^2\theta)(cos^2\theta - sin^2\theta) sin\theta d\theta d\phi = \\
&= 2\pi R^2 S_0 \int_0^{\pi/2} (2cos^2\theta - 1)(2cos^2\theta - 1) sin\theta d\theta d\phi = \\
&= 2\pi R^2 S_0 \left\{ [-4/5 \cos^5\theta]_0^{\pi/2} - [-4/3 \cos^3\theta]_0^{\pi/2} + [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \right\} = \\
&= 2\pi R^2 S_0 \left[\frac{4}{5} - \frac{4}{3} + 1 \right] = 2\pi R^2 S_0 \frac{7}{15}
\end{aligned}
$$

Sostituendo i dati del problema:

$$P = \frac{14\pi(10^3)^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}}{15} \approx 4400\ W = 36.4\ dBW \qquad (c)$$

Esercizio 6

Dalla formula di trasmissione di Friis si ha:

$$P_R = \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 P_T G_T G_R f_T(\theta, \phi) f_R(\theta, \phi)$$

con $G_T = G_R = 1.5$ e $f_T(\theta, \phi) = f_R(\theta, \phi) = \sin^2(\theta)$ per il dipolo corto.
Sostituendo i dati del problema:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{200 \cdot 10^6} = 1.5\ m$$

$$\begin{aligned}
P_R &= \left(\frac{1.5}{4\pi \cdot 2 \cdot 10^3}\right)^2 \cdot 40 \cdot (1.5)^2 = 3.206 \cdot 10^{-7}\ W = 0.32\ \mu W \qquad (a)\\
P_R &= \left(\frac{1.5}{4\pi \cdot 2 \cdot 10^3}\right)^2 \cdot 40 \cdot (1.5)^2 \sin^2(\pi/4) = 0.16\ \mu W \qquad (b)\\
P_R &= \left(\frac{1.5}{4\pi \cdot 2 \cdot 10^3}\right)^2 \cdot 40 \cdot (1.5)^2 \sin^4(\pi/6) = 0.02\ \mu W \qquad (c)
\end{aligned}$$

Esercizio 7

Il fattore di schiera vale:

$$\begin{aligned}
F(\theta) &= |\sum_{i=0}^{n-1} a_i e^{jkid\ cos\theta}|^2 = \\
&= |4 + e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{3}\ cos\theta}|^2 = \\
&= |4 + e^{j\frac{2\pi}{3}\ cos\theta}|^2 = \\
&= (4 + e^{j\frac{2\pi}{3}\ cos\theta})(4 + e^{-j\frac{2\pi}{3}\ cos\theta}) = \\
&= 16 + 4\ e^{j\frac{2\pi}{3}\ cos\theta} + 4\ e^{-j\frac{2\pi}{3}\ cos\theta} + 1 = \\
&= 17 + 8\ cos\left(\frac{2\pi}{3}\ cos\theta\right) \qquad (a)
\end{aligned}$$

Il massimo del diagramma di radiazione si trova per $cos\left(\frac{2\pi}{3}\ cos\theta\right) = 1$, ovvero $cos(\theta) = 0$. Pertanto: $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$ (b).