Dipartimento di Ingegneria "Enzo Ferrari"
Corso di Campi Elettromagnetici - a.a. 2014/15

Appello del 17/2/2015 - Soluzioni

Compito "A" - Testo

Esercizio 1. Un'onda elettromagnetica con frequenza 300 MHz si propaga in un mezzo omogeneo e senza perdite, con $\epsilon_r = 9$, verso le x decrescenti. Il suo campo elettrico è orientato in direzione y, ha ampiezza 5 V/m e fase di riferimento $\phi_0 = \pi/3$. Si determinino: (a) l'espressione istantanea dei campi elettrico e magnetico, $\overline{\mathcal{E}}(x,t)$ e $\overline{\mathcal{H}}(x,t)$; (b) il valor medio del vettore di Poynting.

Esercizio 2. Un'onda sinusoidale a frequenza 5 MHz si propaga in un mezzo omogeneo con parametri caratteristici $\epsilon_r = 25$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 36$. Si calcolino: (a) la costante di fase β dell'onda; (b) la costante di attenuazione α; (c) l'impedenza intrinseca del mezzo η_c; (d) la distanza che l'onda deve percorrere affinchè la sua ampiezza si riduca al 2% del suo valore iniziale.

Esercizio 3. Una linea di trasmissione a $100\,\Omega$ ha impedenza di ingresso (20 - j40) Ω e impedenza di carico (20 + j40) Ω. La velocità di propagazione lungo la linea è pari a 250 m/μs alla frequenza di 30 MHz. Si calcolino: (a) la lunghezza della linea; (b) il rapporto d'onda stazionaria; (c) la distanza dal carico del primo massimo di tensione.

Esercizio 4. Il coefficiente di riflessione al carico di una linea di trasmissione a $50\,\Omega$ è $\rho = 0.62\,e^{j30°}$. Si determinino le condizioni di adattamento con un adattatore $\lambda/4$. Si consiglia l'utilizzo della carta di Smith.

Esercizio 5. Un'antenna irradia nello spazio libero secondo la seguente funzione di intensità di radiazione normalizzata:

$$i_r(\theta,\phi) = sin^2\theta \cdot sin\phi \qquad con\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le \pi$$

si calcolino: (a) la direzione di massimo; (b) l'HPBW nelle due direzioni; (c) la direttività dell'antenna (si consiglia l'utilizzo della formula approssimata).

Esercizio 6. Un semidipolo posto perpendicolarmente ad un piano conduttore ha la seguente intensità di radiazione normalizzata:

$$i_r(\theta) = \cos^2(3\pi\cos\theta)\,\sin^2(2\theta)$$

si determinino le condizioni di zero nel semispazio $0 \le \theta \le \pi/2$.

Esercizio 7. Un radar operante a 10 GHz è realizzato con un antenna parabolica con efficienza d'apertura $\epsilon_{ap} = 0.85$ che eroga una potenza di 200 kW. Il rendimento dell'antenna è unitario e la sua sensibilità in ricezione è -90 dBm. L'antenna deve essere in grado di rilevare bersagli con sezione radar pari a 1.5 m^2 a una distanza di 150 km. Calcolare: (a) il minimo guadagno d'antenna necessario, espresso in dB; (b) il corrispondente diametro dell'antenna parabolica.

Compito “A” - svolgimento e soluzioni

Esercizio 1

Le espressioni istantanee dei campi elettrico e magnetico sono:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}(x,t) &= E_0 \cos(\omega t + \beta x + \phi_0)\, \hat{\jmath} \\ \overline{\mathcal{H}}(x,t) &= \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t + \beta x + \phi_0)\, (-\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) \end{aligned}$$

Dai dati forniti si ricavano:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi\nu = 2\pi \cdot 300 \cdot 10^6 \; rad/s \\ \beta &= \frac{\omega}{v_p} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}\,\omega}{c} = \frac{3 \cdot 2\pi \cdot 300 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 6\pi \; 1/m \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 125.7\ \Omega \end{aligned}$$

sostituendo:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}(x,t) &= 5 \cos(6\pi \cdot 10^8\, t + 6\pi\, x + \frac{\pi}{3})\, \hat{\jmath} \; V/m \\ \overline{\mathcal{H}}(x,t) &= 40 \cos(6\pi \cdot 10^8\, t + 6\pi\, x + \frac{\pi}{3})\, (-\hat{z}) \; mA/m \qquad (a) \end{aligned}$$

Il vettore di Poynting associato è:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}} &= \overline{\mathcal{E}} \times \overline{\mathcal{H}} = \\ &= \left[5 \cos(6\pi \cdot 10^8\, t + 6\pi\, x + \frac{\pi}{3}) \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cos(6\pi \cdot 10^8\, t + 6\pi\, x + \frac{\pi}{3})\right] \hat{\jmath} \times (-\hat{z}) = \\ &= 200 \cdot 10^{-3} \cos^2(6\pi \cdot 10^8\, t + 6\pi\, x + \frac{\pi}{3})\, (-\hat{\imath}) = \\ &= 100 \cdot 10^{-3} \left[1 + \cos(12\pi \cdot 10^8\, t + 12\pi\, x + \frac{2\pi}{3})\right] (-\hat{\imath}) \; W/m^2 \end{aligned}$$

il cui valor medio è $E\{\overline{\mathcal{S}}\} = 100(-\hat{\imath})\; mW/m^2$ (b).

Esercizio 2

L’onda si propaga in un conduttore, pertanto:

$$\begin{aligned} \alpha \approx \beta &= \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36}{2}} = 26.65\; m^{-1} \qquad (a), (b) \\ \eta_c &= (1-j)\frac{\alpha}{\sigma} = (1+j)\frac{26.65}{36} = (1+j)\, 0.74\ \Omega \qquad (c) \end{aligned}$$

La distanza z che l’onda deve percorrere per ridurre la sua ampiezza al 2% del valore iniziale è data da:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha z} &= 0.02 \\ -\alpha z &= \ln(0.02) \\ z = \frac{\ln(0.02)}{-\alpha} &= \frac{3.91}{26.65} = 0.147\; m = 14.7\; cm \qquad (d) \end{aligned}$$

Esercizio 3

Le impedenze normalizzate di ingresso e di carico valgono $z_i = 0.2 - j0.4$ e $z_L = 0.2 + j0.4$. La lunghezza della linea si può leggere direttamente dalla carta di Smith e vale:

$$l = 0.438\lambda - 0.062\lambda = 0.376\lambda$$

poichè la lunghezza d'onda del segnale che si propaga lungo la linea è

$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{2.5 \cdot 10^8}{30 \cdot 10^6} = 8.33\ m$$

si ha $l = 3.13\ m$ (a).
Il ROS può essere individuato direttamente sulla carta di Smith, all'intersezione dx della circonferenza a $|\rho|$ costante con l'asse delle impedenze reali, oppure ricavando $|\rho|$ da z_L e applicando la formula:

$$ROS = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

In entrambi i casi si ottiene $ROS = 5.82$ (b).
Il primo massimo di tensione può essere individuato sulla carta di Smith in corrispondenza dell'intersezione dx della circonferenza a $|\rho|$ costante con l'asse delle impedenze reali. La distanza dal carico si ricava dalla lettura della ghiera esterna della carta:

$$l_{max} = 0.438\lambda - 0.25\lambda = 0.188\lambda = 1.56\ m \qquad (c)$$

Esercizio 4

Utilizzando la carta di Smith, si ricava l'impedenza di carico normalizzata dal coefficiente di riflessione:

$$\begin{aligned} z_L &= 2 + j2 \\ Z_L &= 100 + j100\ \Omega \end{aligned}$$

sempre sulla carta di Smith, si individuano i due punti in cui la circonferenza a $|\rho|$ costante interseca l'asse delle impedenze reali e le rispettive impedenze di ingresso normalizzate. Tali punti sono:
- P_1 a distanza $0.042\,\lambda$ dal carico, con $z_1 = 4.264 \Rightarrow Z_1 = 213.2\ \Omega$;
- P_2 a distanza $0.292\,\lambda$ dal carico, con $z_2 = 0.23 \Rightarrow Z_2 = 11.7\ \Omega$.

L'impedenza caratteristica dell'adattatore $\lambda/4$ nei due casi si ottiene con la formula $Z_0' = \sqrt{Z_0 Z_i}$.
L'adattamento del carico si ottiene quindi:

- Con un $\lambda/4$ di impedenza caratteristica $103.2\ \Omega$ posto a 0.042λ dal carico, oppure
- Con un $\lambda/4$ di impedenza caratteristica $24.2\ \Omega$ posto a 0.292λ dal carico.

Esercizio 5

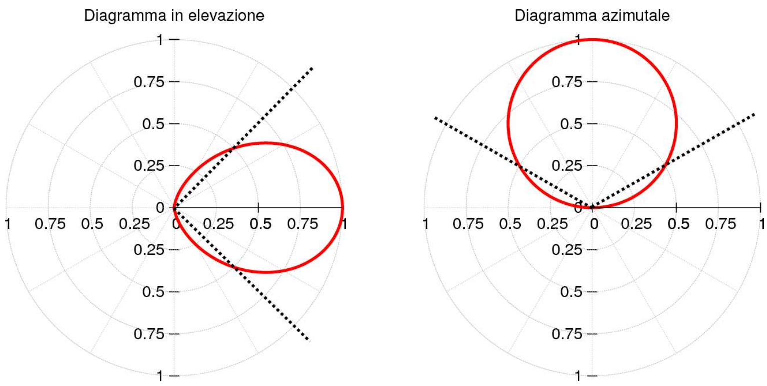

Figura 1: Diagrammi di radiazione in elevazione e azimutale.

I diagrammi di radiazione sui piani di elevazione e azimutale sono riportati in Fig. 1.
La direzione di massimo è quella per cui $\sin^2\theta = 1$ e $\sin\phi = 1$ cioè $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/2$ (a).

Sul piano di elevazione si ha

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta &= \frac{1}{2} \\
\theta &= arcsin(\sqrt{2}/2) \\
\theta &= 45^\circ
\end{aligned}$$

Analogamente sul piano azimutale si ha:

$$\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{1}{2} \\
\phi &= arcsin(1/2) \\
\phi &= 30^\circ
\end{aligned}$$

Per simmetria del diagramma di radiazione, l'HPBW sui piani di elevazione e azimutale sono pertanto:

$$\Delta\theta = 180^\circ - 2\cdot 45^\circ = 90^\circ \qquad \Delta\phi = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ \qquad (b)$$

La direttività dell'antenna vale:

$$D \approx \frac{4\pi}{\Delta\theta\,\Delta\phi} = \frac{4\pi}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}} = \frac{12}{\pi} = 3.82 = 5.8\,dB \quad (c)$$

Esercizio 6

Le condizioni di zero sono l'unione delle soluzioni di $\sin^2(2\theta) = 0$ e $\cos^2(3\pi\cos\theta) = 0$, nell'intervallo di θ ammesso. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
\sin^2(2\theta) &= 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0, \frac{\pi}{2} \\
\cos^2(3\pi\cos\theta) &= 0 \;\Rightarrow\; 3\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\cdots
\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
3\pi\cos\theta &= \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{1}{6} \;\Rightarrow\; \theta = 1.403\,rad \\
3\pi\cos\theta &= \frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{3}\,rad \\
3\pi\cos\theta &= \frac{5\pi}{2} \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{5}{6} \;\Rightarrow\; \theta = 0.586\,rad \\
3\pi\cos\theta &= \frac{7\pi}{2} \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{7}{6} \;\Rightarrow\; \nexists\theta \in [0, \pi/2]
\end{aligned}$$

Per cui le condizioni di zero sono ottenute per θ pari a 0, 0.586, $\pi/3$, 1.403, $\pi/2$ radianti, ovvero 0°, 33.5°, 60°, 80°, 90°.

Esercizio 7

Dai dati forniti si ricavano immediatamente $\lambda = 0.03$ m e $P_{R,min} = 10^{-12}$ W. Il minimo guadagno di antenna necessario si ricava invertendo la formula del radar:

$$G_{min} = \sqrt{\frac{P_{R,min}}{P_T}\frac{(4\pi)^3 R^4}{\lambda^2\,\sigma_T}} = \sqrt{\frac{10^{-12}}{2\cdot 10^5}\frac{(4\pi)^3\,(150\cdot 10^3)^4}{0.03^2\cdot 1.5}} = 60976$$

da cui $G_{min} = 10\,Log(60976) = 47.85\,dB$ (a).
Essendo il rendimento dell'antenna unitario, l'area efficace vale:

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2\,G}{4\pi} = \frac{0.03^2\cdot 60976}{4\pi} = 4.37\,m^2$$

da cui:

$$
\begin{aligned}
A_{par} &= \frac{A_{eff}}{\epsilon_{ap}} = \frac{4.37}{0.85} = 5.14\, m^2 \\
d_{par} &= 2\sqrt{\frac{A_{par}}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{5.14}{\pi}} = 2.56\, m \qquad (b)
\end{aligned}
$$

Compito "B" - testo

Esercizio 1. Un'onda elettromagnetica con frequenza 300 MHz si propaga in un mezzo omogeneo e senza perdite, con $\epsilon_r = 16$, verso le x crescenti. Il suo campo elettrico è orientato in direzione y, ha ampiezza 5 V/m e fase di riferimento $\phi_0 = \pi/3$. Si determinino: (a) l'espressione istantanea dei campi elettrico e magnetico, $\overline{\mathcal{E}}(x,t)$ e $\overline{\mathcal{H}}(x,t)$; (b) il valor medio del vettore di Poynting.

Esercizio 2. Un'onda sinusoidale a frequenza 5 MHz si propaga in un mezzo omogeneo con parametri caratteristici $\epsilon_r = 25$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 36$. Si calcolino: (a) la costante di fase β dell'onda; (b) la costante di attenuazione α; (c) l'impedenza intrinseca del mezzo η_c; (d) la distanza che l'onda deve percorrere affinchè la sua ampiezza si riduca al 2% del suo valore iniziale.

Esercizio 3. Una linea di trasmissione a $100\,\Omega$ ha impedenza di ingresso (20 + j40) Ω e impedenza di carico (20 - j40) Ω. La velocità di propagazione lungo la linea è pari a 250 m/μs alla frequenza di 30 MHz. Si calcolino: (a) la lunghezza della linea; (b) il rapporto d'onda stazionaria; (c) la distanza dal carico del primo minimo di tensione.

Esercizio 4. Il coefficiente di riflessione al carico di una linea di trasmissione a $50\,\Omega$ è $\rho = 0.62\,e^{-j30°}$. Si determinino le condizioni di adattamento con un adattatore $\lambda/4$. Si consiglia l'utilizzo della carta di Smith.

Esercizio 5. Un'antenna irradia nello spazio libero secondo la seguente funzione di intensità di radiazione normalizzata:

$$i_r(\theta,\phi) = sin^2\theta \cdot sin\phi \qquad con\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le \pi$$

si calcolino: (a) la direzione di massimo; (b) l'HPBW nelle due direzioni; (c) la direttività dell'antenna (si consiglia l'utilizzo della formula approssimata).

Esercizio 6. Un semidipolo posto perpendicolarmente ad un piano conduttore ha la seguente intensità di radiazione normalizzata:

$$i_r(\theta) = \cos^2(3\pi\cos\theta)\,\sin^2(2\theta)$$

si determinino le condizioni di zero nel semispazio $0 \le \theta \le \pi/2$.

Esercizio 7. Un radar operante a 5 GHz è realizzato con un antenna parabolica con efficienza d'apertura $\epsilon_{ap} = 0.85$ che eroga una potenza di 200 kW. Il rendimento dell'antenna è unitario e la sua sensibilità in ricezione è -80 dBm. L'antenna deve essere in grado di rilevare bersagli con sezione radar pari a 1.5 m^2 a una distanza di 150 km. Calcolare: (a) il minimo guadagno d'antenna necessario, espresso in dB; (b) il corrispondente diametro dell'antenna parabolica.

Compito “B” - soluzioni

Esercizio 1

(a) $\overline{\mathcal{E}}(x,t) = 5\,\cos(6\pi\cdot 10^8\,t - 8\pi\,x + \frac{\pi}{3})\,\hat{j}\;V/m$ $\qquad \overline{\mathcal{H}}(x,t) = 53\,\cos(6\pi\cdot 10^8\,t - 8\pi\,x + \frac{\pi}{3})\,\hat{z}\;mA/m$
(b) $E\{\overline{\mathcal{S}}\} = 132.5\,\hat{\imath}\;mW/m^2$

Esercizio 2

Si veda compito “A”.

Esercizio 3

(a) 1.03 m
(b) 5.82
(c) 51.5 cm

Esercizio 4

L’adattamento del carico si ottiene

- con un $\lambda/4$ di impedenza caratteristica 103.2 Ω posto a 0.458λ dal carico, oppure
- con un $\lambda/4$ di impedenza caratteristica 24.2 Ω posto a 0.208λ dal carico.

Esercizio 5

Si veda compito “A”.

Esercizio 6

Si veda compito “A”.

Esercizio 7

(a) $G_{min} = 49.8$ dB
(b) $d_{par} = 6.43$ m.