

Elettromagnetismo Applicato

III appello - Prova scritta 11 febbraio 2015

1. L'espressione istantanea di un campo elettrico di un segnale che si propaga in un mezzo senza perdite avente indice di rifrazione pari a 1.5 è data da:

$$\vec{E}(z, t) = 50 \cos(30 \times 10^6 t + \beta z) \hat{i} \text{ mV/m}.$$

Si determinino nell'ordine: (a) la direzione di propagazione, (b) la velocità di fase v_p , (c) la frequenza ν , (d) la costante di fase β , (e) la lunghezza d'onda λ , (f) il fasore campo elettrico $\vec{E}(z)$, (g) il fasore campo magnetico $\vec{H}(z)$, (h) l'espressione del vettore di Poynting $\vec{S}(z)$. Non si dimentichi di indicare sempre la direzione dei vettori e le unità di misura.

2. Una linea senza perdite a 50Ω con dielettrico che ha $\epsilon_r = 2.56$ è terminata su un circuito aperto. Quanto deve essere lunga perché la sua impedenza di ingresso sia equivalente a quella di un condensatore da 15 pF alla frequenza di 100 MHz ? Si suggerisce l'utilizzo della Carta di Smith.
3. Una linea di trasmissione con ammettenza caratteristica $Y_0 = 0.02$ è connessa ad un carico con ammettenza $Y_L = 0.06 - j0.02$. Utilizzando la Carta di Smith, si trovino le possibili posizioni e lunghezze di uno stub in parallelo necessario per adattare la linea.
4. Data una linea in aria e senza perdite, lunga 12 m con $Z_0 = 50 \Omega$, chiusa su un carico $Z_L = 25 \Omega$, si disegni il diagramma a rimbalzo per la tensione $V(z, t)$ supponendo la linea alimentata da un gradino di tensione applicato in $t = 0$ da un generatore con $V_g = 12 \text{ V}$ e $Z_g = 50 \Omega$. Quanto vale la tensione sul carico a 80 ns ?
5. Un radar operante a 10 GHz è realizzato con un'antenna parabolica con efficienza d'apertura $\epsilon_{ap} = 0.85$ che eroga una potenza di 200 kW . Il rendimento dell'antenna è unitario e la sua sensibilità in ricezione è -90 dBm . L'antenna deve essere in grado di rilevare bersagli con sezione radar pari a 1.5 m^2 a una distanza di 150 km . Calcolare: (a) il minimo guadagno d'antenna necessario, espresso in dB ; (b) il corrispondente diametro dell'antenna parabolica.
6. Si consideri un'antenna log-periodica, con passo logaritmico $\tau = 0.8$, costituita da quindici dipoli a $\lambda/2$ di cui il più lungo misura $l_1 = 170 \text{ cm}$. Determinare la banda di funzionamento dell'antenna.
7. Un'antenna parabolica a rendimento unitario ed efficienza dell'apertura $\epsilon_{ap} = 0.75$, ha un guadagno $G = 185 = 22.67 \text{ dBi}$ a $\nu = 3 \text{ GHz}$. Si determini il suo diametro e la direttività in dBd .

Risposte ai quesiti

Esercizio 1

- (a) _____ (b) _____
(c) _____ (d) _____
(e) _____ (f) _____
(g) _____ (h) _____

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

- (a) _____ (b) _____

Esercizio 6

Esercizio 7

Risposte

1. (a) L'onda si propaga in direzione $-\hat{z}$.
- (b) La velocità di fase è: $v_p = \frac{3 \times 10^8}{1.5} = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$.
- (c) La frequenza vale $\nu = 4.77 \text{ MHz}$.
- (d) $\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{30 \times 10^6}{2.0 \times 10^8} = 0.15 \text{ rad/m}$.
- (e) $\lambda = 2\pi/\beta$ o anche $\lambda = v_p/\nu$ da cui $\lambda = 41.9 \text{ m}$.
- (f) Il fasore campo elettrico è dato da: $\overline{E}(z) = E_0 e^{+j\beta z \hat{i}} = 50 e^{+j0.15 z \hat{i}} \text{ mV/m}$.
- (g) Il fasore campo magnetico $\overline{H}(z)$ è ottenibile da:

$$\overline{H}(z) = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \overline{E}(z) = \frac{1}{\eta} E(z) (-\hat{j}) = -\frac{50 \times 10^{-3}}{377/1.5} e^{+j0.15 z \hat{i}} \hat{j} = -200 e^{+j0.15 z \hat{i}} \hat{j} \mu\text{A/m}.$$

- (h) Infine il vettore di Poynting complesso è dato da:

$$\begin{aligned} \overline{S}(z) &= \frac{1}{2} \overline{E}(z) \times \overline{H}^*(z) \\ &= \frac{1}{2} 50 e^{+j0.15 z \hat{i}} \text{ mV/m} \times (-200) e^{-j0.15 z \hat{i}} \hat{j} \mu\text{A/m} \\ &= -5 \hat{z} \mu\text{W/m}^2. \end{aligned}$$

2. L'impedenza di ingresso normalizzata della linea vale:

$$z_i = -j \frac{1}{\omega C Z_0} = -j2.12.$$

Ruotando sulla Carta di Smith dal punto di circuito aperto verso il generatore, ovvero in senso orario, fino ad incontrare la reattanza $x = -2.12$, si percorre un arco di circonferenza di lunghezza

$$l = 0.32\lambda - 0.25\lambda = 0.07\lambda.$$

Essendo $\lambda = v_p/\nu = 1.875 \text{ m}$, si ottiene $l = 0.07 \cdot 1.875 = 13.12 \text{ cm}$.

Alternativamente si può risolvere l'esercizio per via analitica come segue. La costante di propagazione β vale:

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi\nu}{v_p} = \frac{2\pi\nu\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} = \frac{2\pi \times 10^8 \sqrt{2.56}}{3 \cdot 10^8} = 3.35 \text{ rad/m}.$$

L'impedenza di ingresso di una linea in circuito aperto è data da $Z_i = -jZ_0 \cot\beta l$ e dovendo essere di tipo capacitivo si può scrivere:

$$-jZ_0 \cot\beta l = -j \frac{1}{\omega C}$$

da cui

$$\beta l = \text{arccotg} \frac{1}{\omega C Z_0} = \text{arccotg}(2.12) = \text{arctg}\left(\frac{1}{2.12}\right) = 0.44 \text{ rad}.$$

La lunghezza cercata è quindi:

$$l = \frac{0.44}{\beta} = \frac{0.1558}{3.35} = 13.15 \text{ cm}.$$

3. Il carico normalizzato vale $y_L = Y_L/Y_0 = 3 - j$. Posizionandolo sulla carta di Smith e ruotando a modulo del coefficiente di riflessione costante, si interseca la circonferenza $g = 1$ nei punti per cui si ha $y_A = 1 - j1.3$ e $y_B = 1 + j1.3$.

Soluzione con stub induttivo: la sezione della linea corrispondente a y_A si trova ad una distanza dal carico pari a $0.3290\lambda - 0.2675\lambda = 0.0615\lambda$. Qui lo stub deve presentare un'ammittenza normalizzata di $+j1.3$ e pertanto deve essere lungo $0.25\lambda + 0.145\lambda = 0.395\lambda$.

Soluzione con stub capacitivo: la sezione della linea corrispondente a y_B si trova ad una distanza dal carico pari a $0.5\lambda - (0.2675\lambda - 0.1710\lambda) = 0.4035\lambda$. Qui lo stub deve presentare un'ammittenza normalizzata di $-j1.3$ e pertanto deve essere lungo $0.3550\lambda - 0.25\lambda = 0.1050\lambda$.

4. I dati del problema permettono di ottenere:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3};$$

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0;$$

$$T = \frac{L}{v_p} = \frac{12}{3 \cdot 10^8} = 40 \text{ ns};$$

$$V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{12 \cdot 50}{50 + 50} = 6 \text{ V}.$$

L'onda riflessa di ampiezza $V_1^- = 6(-1/3) = -2 \text{ V}$ viene completamente assorbita dal generatore e il diagramma a rimbalzo termina dopo 80 ns .

Sul carico si sommano l'onda diretta e quella riflessa fornendo un valore di 4 V .

5. Dai dati forniti si ricavano immediatamente $\lambda = 0.03 \text{ m}$ e $P_{R,min} = 10^{-12} \text{ W}$.

(a) Il minimo guadagno di antenna necessario si ricava invertendo la formula del radar:

$$G_{min} = \sqrt{\frac{P_{R,min} (4\pi)^3 R^4}{P_T \lambda^2 \sigma_T}} = \sqrt{\frac{10^{-12} (4\pi)^3 (150 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 0.03^2 \cdot 1.5}} = 60976$$

da cui $G_{min} = 10 \text{ Log}(60976) = 47.85 \text{ dB}$.

(b) Essendo il rendimento dell'antenna unitario, l'area efficace vale:

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2 G}{4\pi} = \frac{0.03^2 \cdot 60976}{4\pi} = 4.37 \text{ m}^2$$

da cui:

$$A_{par} = \frac{A_{eff}}{\epsilon_{ap}} = \frac{4.37}{0.85} = 5.14 \text{ m}^2$$

$$d_{par} = 2\sqrt{\frac{A_{par}}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{5.14}{\pi}} = 2.56 \text{ m}$$

6. La lunghezza dell'elemento più corto è data da:

$$l_1 = l_{10} \tau^{N-1} = 1.7 \cdot 0.8^{14} = 0.075 \text{ m}$$

da cui la lunghezza d'onda a cui risuona l'elemento più corto che è $\lambda = 0.15 \text{ m}$.

Le due frequenze che definiscono la banda di funzionamento dell'antenna sono quindi:

$$\nu_{min} = c/(2 \cdot l_{10}) = 88 \text{ MHz}$$

$$\nu_{max} = c/(2 \cdot l_1) = 2 \text{ GHz}.$$

7. Ricordando la relazione

$$\frac{A_{eff}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi},$$

si ha:

$$A_{eff} = \frac{D \lambda^2}{4\pi} = 0.147,$$

da cui $A_{geom} = A_{eff}/\epsilon_{ap} = 0.1963$. Il diametro vale quindi 0.5 m .

La direttività infine è $D = 22.67 - 2.14 = 20.53 \text{ dBd}$.