Elettromagnetismo Applicato

I appello - Prova scritta del 12 gennaio 2015

1. Il vettore complesso rappresentativo del campo elettrico in un mezzo dielettrico omogeneo è:

$$\overline{E}(z) = 1.5\ e^{-j0.628z}\ \hat{j}\ V/m.$$

   Sapendo che la frequenza dell'onda è 5 MHz, calcolare: (a) la velocità di propagazione; (b) il vettore complesso rappresentativo del campo magnetico.

2. Una linea di trasmissione di impedenza caratteristica 50 Ω è chiusa su un carico sconosciuto. Sapendo che la distanza tra due minimi di tensione consecutivi lungo la linea è pari a 15 cm, che la distanza dalla sezione di carico del primo minimo di tensione è di 10 cm e che il rapporto d'onda stazionaria vale 5, calcolare: (a) la lunghezza d'onda di lavoro; (b) il coefficiente di riflessione al carico; (c) le condizioni di adattamento con un adattatore $\lambda/4$. Si consiglia l'utilizzo della carta di Smith.

3. L'impedenza di ingresso di una linea di trasmissione a $50\,\Omega$ è $Z_i = (45 + j15)\,\Omega$. Quanto vale il rapporto d'onda stazionaria in questa linea?

4. Una linea di trasmissione ideale a 50 Ω è alimentata con un gradino di tensione a $V_g = 5$ V e $R_g = 25$ Ω e chiusa su un carico $Z_L = 100$ Ω. Sapendo che il mezzo dielettrico che costituisce la linea ha $\epsilon_r = 25$ e che la linea è lunga 6 m, tracciare il diagramma a rimbalzo per $V(z, t)$ e l'andamento della tensione nel punto intermedio della linea nell'intervallo tra t =0 e $t = 0.5$ μs.

5. Un'antenna senza perdite ha la seguente intensità di radiazione:

$$I_r(\theta) = I_0\ cos^3(\theta)\ W/sr \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi$$

   con $I_0 = 6.37\,W/sr$. Si calcolino: (a) la potenza irradiata ottenuta dall'integrazione di I_r[1]; (b) la direzione di massima radiazione; (c) l'HPBW sul piano zenitale.

6. La torre di controllo di un piccolo aeroporto dispone di un radar realizzato con un'antenna parabolica di diametro equivalente pari a 4 m, che opera ad una frequenza di 2 GHz con un rendimento di 0.8. Per garantire la sicurezza del traffico aereo è necessario poter individuare aeromobili con sezione radar di 20 m^2 a una distanza minima di 10 km. Se la sensibilità del ricevitore a terra è pari a $-50\,dBm$, si calcolino: (a) La minima potenza che deve essere emessa dal radar per garantire la sicurezza; (b) la massima distanza a cui il sistema è in grado di individuare un oggetto con sezione radar di 3 m^2.

7. Un'antenna parabolica ha il diametro $d = 30\,cm$ e l'efficienza dell'apertura $\varepsilon_{ap} = 0.95$ alla frequenza $\nu = 36\,GHz$. Si determini la sua direttività in dBi e dBd.

---

[1] Si rammenti la regola di integrazione:

$$\int [(f(x)]^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C \qquad con\ n \neq -1$$

Risposte

1. (a) Dai dati del problema si ricava immediatamente $\beta = 0.628$, da cui:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.628} = 10\ m \\ v_p &= \lambda\nu = 10 \cdot 5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^7\ m/s \end{aligned}$$

(b) L'indice di rifrazione del mezzo in cui l'onda si propaga vale:

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6} = 6$$

pertanto l'impedenza intrinseca del mezzo è

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} = \frac{377}{6} = 62.83\ \Omega.$$

Si ricava quindi il vettore complesso rappresentativo del campo magnetico:

$$\begin{aligned} \overline{H}(z) &= \frac{1}{\eta}\hat{z} \times \overline{E}(z) \\ &= (15.9 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5)e^{-j0.628z}\hat{z} \times \hat{j} = \\ &= 24e^{-j0.628z}(-\hat{\imath}) \quad mA/m \end{aligned}$$

2. (a) La distanza tra due minimi di tensione è pari a mezza lunghezza d'onda, pertanto $\lambda = 30$ cm.
(b) Il modulo del coefficiente di riflessione si ricava dal ROS:

$$|\rho| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{4}{6} = 0.667$$

mentre la fase di ρ al carico, ϕ_L, si ottiene dalla posizione del primo minimo di tensione sulla linea, e vale:

$$\phi_L = -2\beta l_{min} - \pi = -2\frac{2\pi}{\lambda}l_{min} - \pi = -2\frac{2\pi}{30}(-10) - \pi = \frac{\pi}{3}$$

da cui:

$$\rho_L = 0.667e^{j\frac{\pi}{3}} = 0.333 + j0.574$$

(c) Sulla carta di Smith, la circonferenza a $|\rho|$ costante interseca l'asse delle impedenze reali in $z_{max} = 5$ e $z_{min} = 0.2$, rispettivamente alle distanze $d_{max} = 10\ cm - \lambda/4 = 2.5\ cm$ e $d_{min} = 10\ cm$ dal carico. L'adattamento è pertanto ottenuto con:

- una rete $\lambda/4$ di impedenza $\sqrt{5 \cdot 50 \cdot 50} = 111.8\ \Omega$ posta a 2.5 cm dal carico, oppure
- una rete $\lambda/4$ di impedenza $\sqrt{0.2 \cdot 50 \cdot 50} = 22.4\ \Omega$ posta a 10 cm dal carico.

3. L'impedenza di ingresso normalizzata vale $z_i = Z_i/Z_0 = (45 + j15)/50 = 0.9 + j0.3$. Il valore di $\varrho(l)$ sulla sezione di ingresso è dato da:

$$\varrho(l) = \frac{z_i - 1}{z_i + 1} = \frac{0.9 + j0.3 - 1}{0.9 + j0.3 + 1} = 0.027 + j0.162$$

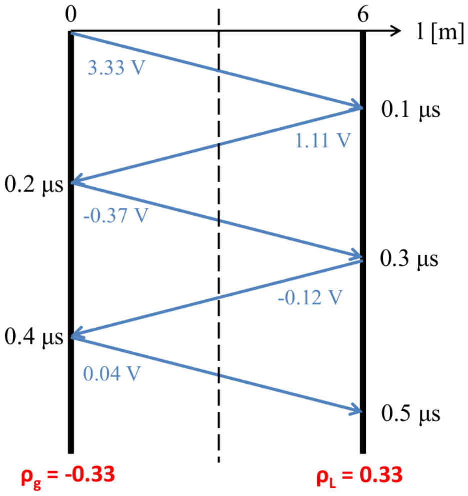
da cui $|\varrho| = \sqrt{0.027^2 + 0.162^2} = 0.164$. Il rapporto d'onda stazionaria vale quindi:

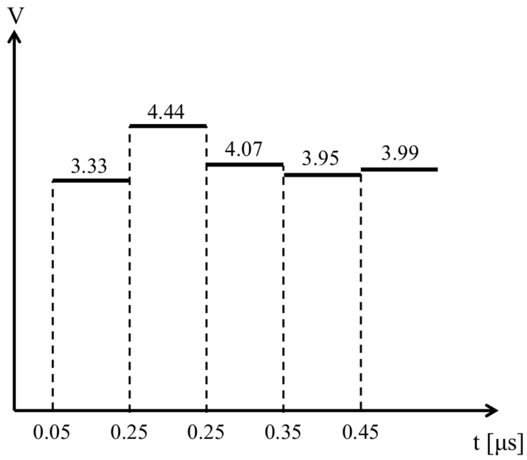
$$S = \frac{1 + |\varrho|}{1 - |\varrho|} = \frac{1 + 0.164}{1 - 0.164} = \frac{1.164}{0.873} = 1.4.$$

4. Dai dati forniti si ricavano:

$$
\begin{aligned}
V_1^+ &= \frac{V_g Z_0}{Z_0 + R_g} = \frac{5 \cdot 50}{50 + 25} = 3.33\ V \\
\rho_g &= \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3} \\
\rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3} \\
v_p &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{25}} = 6 \cdot 10^7\ m/s \\
T &= \frac{L}{v_p} = \frac{6}{6 \cdot 10^7} = 0.1\ \mu s
\end{aligned}
$$

a partire dai quali è possibile tracciare i grafici richiesti.





5. (a) La potenza totale irradiata dall'antenna si ottiene integrando la densità di potenza:

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{4\pi} I_0 cos^3\theta\ d\Omega = \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_0 cos^3\theta sin\theta\ d\theta d\varphi = \\
&= I_0 \int_0^{\pi/2} cos^3\theta sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
&= 2\pi I_0 \left[\frac{cos^4\theta}{4} \right]_0^{pi/2} = \frac{\pi I_0}{2}.
\end{aligned}
$$

Essendo $I_0 = 6.37\, W/sr$, si ricava immediatamente $P = 10$ W.

(b) La direzione di massima radiazione si ha per $\theta = 0$.

(c) L'HPBW è delimitato dalla condizione $I(\theta_H) = cos^3\theta_H = 0.5$, ossia

$$cos\theta_H = 0.79 \Rightarrow \theta_H = arccos(0.79) = 0.66\ rad$$

Per simmetria $HPBW = 2\theta_H = 1.32\ rad = 75.6°$.

6. (a) La minima potenza che deve essere trasmessa si ottiene invertendo la formula del radar:

$$P_{T,min} = \frac{P_{R,min}(4\pi)^3 R^4}{G_T G_R \lambda^2 \sigma_T}$$

dai dati forniti si ricavano λ, G_T e G_R:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^9} = 0.15\ m \\ G_T = G_R &= \xi \frac{4\pi A_{eff}}{\lambda^2} = \frac{0.8 \cdot 4\pi(\pi 2^2)}{0.15^2} = 5614 \end{aligned}$$

sostituendo:

$$P_{T,min} = \frac{10^{-8} \cdot (4\pi)^3 \cdot (10 \cdot 10^3)^4}{5614^2 \cdot 0.15^2 \cdot 20} = 13989\ W \approx 14\ kW.$$

(b) La massima distanza a cui è possibile individuare un oggetto di sezione radar $3\,m^2$ si ottiene invertendo nuovamente la formula del radar:

$$\begin{aligned} R_{max} &= \left[\frac{P_T G_T G_R \lambda^2 \sigma_T}{(4\pi)^3 P_{R,min}}\right]^{1/4} = \\ &= \left[\frac{14 \cdot 10^3 \cdot (5614)^2 \cdot (0.15)^2 \cdot 3}{(4\pi)^3 \cdot 10^{-8}}\right]^{1/4} = \\ &= 6225\ m \end{aligned}$$

7. Ricordando la relazione

$$\frac{A_{eff}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi},$$

si ha:

$$D = \frac{A_{eff}\, 4\pi}{\lambda^2}$$

da cui

$$D = \frac{\pi (d/2)^2 \varepsilon_{ap}\, 4\pi}{\lambda^2} = \frac{\pi 0.15^2 \cdot 0.95 \cdot 4\pi}{(3 \times 10^8/36 \times 10^9)^2} = 12152 = 40.84\, dBi.$$

Infine

$$D_{dBd} = D_{dBi} - 2.14\, dBi = 40.84\, dBi - 2.14\, dBi = 38.7\, dBd.$$