Elettromagnetismo Applicato

Prova scritta del 14 gennaio 2016

Il candidato risponda ai quesiti riportando i risultati negli appositi spazi sul secondo foglio.

1. Si consideri un fascio laser che si propaga attraverso l'atmosfera descritto dal seguente campo elettrico:
$$\overline{E}(x,t) = 20\, e^{-0.1\,x} cos(12 \times 10^{12} t + 4 \times 10^4 x)\hat{\jmath} \quad \text{(V/m)}.$$
Si determinino nell'ordine: (a) la direzione di propagazione, (b) la velocità di fase v_p, (c) la frequenza ν, (d) la sua ampiezza ad una distanza di $50\,m$, (e) la lunghezza d'onda λ, (f) il fasore campo elettrico $\overline{E}(x)$, (g) l'espressione del vettore di Poynting complesso $\overline{S}(x)$. Non si dimentichi di indicare sempre la direzione dei vettori e le unità di misura.

2. Una linea di trasmissione supposta senza perdite è costitutita da un cavo coassiale il cui conduttore interno ha un diametro di $1\,mm$ e il materiale isolante in teflon ha $\varepsilon_r = 2.1$ e spessore di $1\,mm$. Ricordando che la capacità per unità di lunghezza vale $C = 2\pi\varepsilon/(ln\frac{b}{a})$, con a e b rispettivamente i raggi del conduttore interno ed esterno, si calcoli (a) la velocità di propagazione v_p e (b) l'impedenza caratteristica Z_0.

3. Una linea di trasmissione a $50\,\Omega$ è connessa ad un carico con impedenza normalizzata $z_L = 3-j$. Utilizzando la Carta di Smith, si trovi (a) il coefficiente di riflessione al carico, (b) la posizione del primo minimo e del primo massimo di tensione rispetto al carico, (c) il rapporto d'onda stazionaria, (d) l'impedenza caratteristica Z_0' di un adattatore a $\lambda/4$ posto in corrispondenza del primo minimo di tensione.

4. Data una linea senza perdite, lunga $3\,km$ con $Z_0 = 50\,\Omega$, $v_p = c$, chiusa su un carico $Z_L = 30\,\Omega$, si disegni il diagramma a rimbalzo per la tensione $V(z,t)$ e l'andamento della tensione nel tempo a metà della linea supponendo la stessa alimentata da un gradino di tensione applicato in $t = 0$ da un generatore con $V_g = 24\,V$ e $Z_g = 50\,\Omega$.

5. Un sistema di trasmissione televisivo via satellite a $6\,GHz$ trasmette $100\,W$ attraverso un'antenna parabolica del diametro $2\,m$ ad una distanza dalla terra di $40.000\,km$. Ogni canale occupa una banda di $5\,MHz$. Il ricevitore, pure parabolico, ha $T_{sys} = 580\,K$ e deve garantire un rapporto segnale rumore $SNR = 40\,dB$. (a) Supponendo le antenne allineate lungo le rispettive direzioni di massimo e a rendimento unitario, si calcoli quale deve essere il diametro minimo dell'antenna parabolica ricevente. (b) Si ricalcoli quale dovrebbe essere il valore di tale diametro nel caso in cui le intensità di radiazione delle antenne lungo la direzione di allineamento siano $i_T = 0.9$, $i_R = 0.85$, i rendimenti di entrambe pari all'80%, si debba tenere in conto un'attenuazione supplementare pari ad $A_S = 10\,dB$ e l'efficienza dell'apertura di quella ricevente sia solo $\epsilon_{ap} = 0.65$.

6. Si consideri un'antenna log-periodica costituita da otto dipoli a $\lambda/2$ di cui il più lungo misura $l_1 = 1.714\,m$ e risuona a $\nu = 87.5\,MHz$. Sapendo che il passo logaritmico della schiera è pari a $\tau = 0.96$, determinare la lunghezza dei rimanenti dipoli e la banda di funzionamento dell'antenna. Se i primi due dipoli distano $d_{12} = 9.3\,cm$ quali sono le distanze tra gli altri?

7. Se la densità di potenza irradiata da una antenna filare è $S(r,\theta) = 6\, I_0^2 \cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)/r^2$ e assume un valore massimo di $S_{max} = 24\mu W/m^2$ ad una distanza di $2\,km$, quale è la direzione di massimo e il valore della corrente I_o con cui è alimentata l'antenna?

Risposte

1. (a) L'onda si propaga in direzione $-\hat{x}$.
(b) La velocità di fase è: $v_p = \frac{12\times10^{12}}{4\times10^4} = 3\times10^8$.
(c) La frequenza vale $\nu = \frac{12\times10^{12}}{2\pi} = 1,91\,THz$.
(d) La sua ampiezza vale $20\times e^{-0.1\cdot 50} = 135\,mV/m$.
(e) $\lambda = 2\pi/\beta$ o anche $\lambda = v_p/\nu$ da cui $\lambda = 157\,\mu m$.
(f) Il fasore campo elettrico è dato da: $\overline{E}(x) = E_0\,e^{-\alpha x}e^{+j\beta x}\hat{\jmath} = 20\,e^{-0.1\,x}e^{+j4\cdot10^4\,x}\hat{\jmath}\,V/m$.
(g) Infine il vettore di Poynting complesso è dato da:
$$\overline{S}(x) = -\frac{|\overline{E}(x)|^2}{2\eta}\,\hat{\imath} = -\frac{|20\,e^{-0.1\,x}e^{+j4\cdot10^4\,x}|^2}{2\cdot377}\,\hat{\imath}\;W/m^2 = -530\,e^{-0.2\,x}\,\hat{\imath}\;mW/m^2.$$

2. (a) La velocità di propagazione è esprimibile come: $v_p = 3\times10^8/\sqrt{2.1} = 2.1\times10^8\,m/s$.
(b) L'impedenza intrinseca vale $Z_0 = \sqrt{L/C}$ e quindi, ricordando le le espressioni di C ed L, si ottiene:
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{1}{(2\pi)^2}\,ln^2\Big(\frac{b}{a}\Big)} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\,ln\Big(\frac{b}{a}\Big) = \frac{60}{\sqrt{2.1}}\,ln\Big(\frac{1.5}{0.5}\Big) = 45\,\Omega.$$
Alternativamente, calcolato $C = 0.106\times10^{-9}\,F/m$, ricordando che $LC = \mu\varepsilon$, si ha:
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{C^2}} = \frac{1}{v_p\cdot C} = \frac{1}{2.1\times10^8\cdot0.106\times10^{-9}} = 45\,\Omega.$$

3. Posizionando il punto di carico $z_L = 3-j$ sulla carta di Smith si legge direttamente il modulo e la fase del coefficiente di riflessione, inoltre ruotando a modulo del coefficiente di riflessione costante, si interseca l'asse reale in corrispondenza delle due sezioni che presentano il minimo e il massimo di tensione. Si ha quindi:
(a) $\varrho_L = 0.55\,e^{-13^\circ}$;
(b) $l_{min} = 0.232\,\lambda$ e $l_{max} = 0.482\,\lambda$;
(c) $S = 3.4$;
(d) $Z_0' = \sqrt{Z_0\cdot Z_{min}} = \sqrt{50\cdot0.3\cdot50} = 27.38\,\Omega$.

4. I dati del problema permettono di ottenere:
$$\varrho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{30-50}{30+50} = -\frac{1}{4};$$
$$\varrho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{50-50}{50+50} = 0;$$
$$T = \frac{L}{v_p} = \frac{3\cdot10^3}{3\cdot10^8} = 10\,\mu s;$$
$$V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{24\cdot50}{50+50} = 12\,V.$$
L'onda riflessa di ampiezza $V_1^- = 12\,(-1/4) = -3\,V$ viene completamente assorbita dal generatore. Il diagramma a rimbalzo termina dopo $20\,\mu s$ mentre quello della tensione è nullo fino a $t = 5\,\mu s$, assume il valore di $12\,V$ fino a $t = 15\,\mu s$ e da qui in poi si assesta a $9\,V$. Si lascia allo studente il loro disegno.

5. (a) La lunghezza d'onda di lavoro vale $\lambda = 3\times10^8/6\times10^9 = 5\,cm$ mentre l'area geometrica dell'antenna trasmittente è: $A_{geomT} = \pi(\frac{d_T}{2})^2 = \pi\,m^2$. Il rumore infine vale $N = KT_{sys}B = 1.38\times10^{-23}\times580\times5\times10^6 = 4\times10^{-14}W$.
Dalla formula di Friis
$$P_R = P_T G_T G_R\cdot\frac{1}{A_0 A_S}\,i_T i_R$$

esplicitando i guadagni, trascurando l'attenuazione supplementare, si ottiene:

$$P_R = \frac{P_T A_{effT} A_{effR} \delta_T \delta_R}{\lambda^2 R^2} i_T i_R = \frac{100\,\pi A_{effR} \cdot 1 \cdot 1}{(5 \times 10^{-2})^2 (4 \times 10^7)^2} \cdot 1 \cdot 1 = 0.785 \times 10^{-10} A_{effR}$$

Il rapporto segnale rumore è quindi

$$SNR = \frac{P_R}{N} = 40\ dB = 10^4 = \frac{0.785 \times 10^{-10} A_{effR}}{4 \times 10^{-14}}$$

da cui si ottiene $A_{effR} = 5.1\,m^2$ e quindi il $d_R = \sqrt{4A_{effR}/\pi} = 2.55\,m$.

(b) Nel secondo caso si ha:

$$P_R = \frac{P_T A_{effT} A_{effR} \delta_T \delta_R}{\lambda^2 R^2 A_S} i_T i_R = \frac{100\,\pi A_{effR} \cdot 0.8 \cdot 0.8}{(5 \times 10^{-2})^2 (4 \times 10^7)^2 10} \cdot 0.9 \cdot 0.85 = 0.384 \times 10^{-11} A_{effR}.$$

Pertanto il rapporto segnale rumore è

$$SNR = \frac{P_R}{N} = 40\ dB = 10^4 = \frac{0.384 \times 10^{-11} A_{effR}}{4 \times 10^{-14}}$$

da cui si ottiene $A_{effR} = 104\,m^2$. Considerando l'efficienza dell'apertura si ha $A_{geomR} = 104/0.65 = 160\,m^2$ e quindi il $d_R = \sqrt{4A_{geomR}/\pi} = 203.8\,m$.

6. La lunghezza dell'elemento più corto è data da:

$$l_8 = l_1 \cdot \tau^{N-1} = 1.714 \cdot /0.96^7 = 1.29\,m.$$

Le due frequenze che definiscono la banda di funzionamento dell'antenna sono quindi:

$$\nu_{min} = c/(2 \cdot l_1) = 3 \times 10^8/(2 \cdot 1.714) = 85.5\,MHz$$

come da dati del problema e

$$\nu_{max} = c/(2 \cdot l_8) = 3 \times 10^8/(2 \cdot 1.29) = 116\,MHz.$$

Le lunghezze dei dipoli sono:
$l_2 = l_1 \cdot \tau = 1.65\,m$,
$l_3 = l_2 \cdot \tau = 1.58\,m$,
$l_4 = l_3 \cdot \tau = 1.52\,m$,
$l_5 = l_4 \cdot \tau = 1.46\,m$,
$l_6 = l_5 \cdot \tau = 1.40\,m$,
$l_7 = l_6 \cdot \tau = 1.34\,m$,
$l_8 = l_7 \cdot \tau = 1.29\,m$.
Analogamente si calcolano le distanze tra i dipoli che risultano:
$d_{12} = 9.30\,cm$,
$d_{23} = 8.93\,cm$,
$d_{34} = 8,57\,cm$,
$d_{45} = 8.23\,cm$,
$d_{56} = 7.90\,cm$,
$d_{67} = 7,58\,cm$,
$d_{78} = 7.28\,cm$.

7. Il valore S_{max} si ha per $\theta = \pi/2$ e vale $S_{max} = 6\,I_0^2/r^2$ da cui

$$I_0^2 = \frac{r^2}{6} \cdot S_{max} = \frac{4 \times 10^6}{6} \cdot 24 \times 10^{-6} = 16\,A^2$$

ed infine $I_0 = 4\,A$.