

Elettromagnetismo Applicato

Prova scritta del 22 dicembre 2017

Il candidato risponda ai quesiti riportando i risultati negli appositi spazi sul secondo foglio.

1. L'espressione istantanea di un campo elettrico di un segnale che si propaga in un mezzo senza perdite avente $\epsilon_r = 2.56$ è data da:

$$\vec{E}(x, t) = 1885 \cos(3.1416 \times 10^8 t + \beta x) \hat{z} \text{ mV/m}.$$

Si determinino nell'ordine: (a) la direzione di propagazione, (b) la velocità di fase v_p , (c) la frequenza ν , (d) la costante di fase β , (e) la lunghezza d'onda λ , (f) il fasore campo elettrico $\vec{E}(x)$, (g) il fasore campo magnetico $\vec{H}(x)$, (h) il valore del vettore di Poynting complesso $\vec{S}(x)$. Non si dimentichi di indicare sempre la direzione dei vettori e le unità di misura.

2. Una linea senza perdite a 75Ω è costruita con un materiale isolante che ha indice di rifrazione $n = 1.5$. Se la linea è terminata su un corto circuito, quanto deve essere lunga perché la sua impedenza di ingresso sia equivalente a quella di un condensatore da 10 pF alla frequenza di 500 MHz ? Si suggerisce l'utilizzo della Carta di Smith.
3. Una linea di trasmissione con $Z_0 = 100 \Omega$ è adattata tramite un adattatore a $\lambda/4$ inserito a distanza opportuna dal carico. Sapendo che il rapporto d'onda stazionaria della linea è $S = 1.2$ quali sono i possibili valori della impedenza caratteristica dell'adattatore?
4. Data una linea in aria senza perdite, a 50Ω , lunga 12 m , chiusa su un carico $Z_L = 25 \Omega$, si disegni il diagramma a rimbalzo per la tensione $V(z, t)$ e l'andamento della tensione nel tempo fino a 160 ns in corrispondenza della sezione $z = 6 \text{ m}$ supponendo la linea alimentata da un gradino di tensione applicato in $t = 0$ da un generatore con $V_g = 12 \text{ V}$ e $Z_g = 100 \Omega$.
5. Un ponte radio tra due antenne è soggetto ad una attenuazione supplementare di 2.5 dB . L'antenna trasmittente è una parabola di diametro pari a 50 cm , rendimento $\delta = 0.9$ ed efficienza dell'apertura $\epsilon_{ap} = 0.85$. L'antenna ricevente è un dipolo corto avente guadagno pari a 2 dB , sensibilità pari a -40 dBm ed è disallineato di 30° rispetto alla direzione di massima ricezione. Si determini la minima potenza che si deve trasmettere in modo da garantire il collegamento fino a una distanza $R = 2 \text{ km}$.
6. Si determinino le direzioni di zero e l'ampiezza del lobo che comprende la direzione $\theta = 0^\circ$ di un semidipolo perpendicolare ad un piano conduttore che presenta la seguente intensità di radiazione normalizzata, definita nel semispazio $0 \leq \theta \leq \pi/2$: $i_r = \cos^2(4\pi \sin\theta)$.
7. Si consideri un'antenna log-periodica costituita da dipoli a $\lambda/2$ operante nella banda di frequenza tra 100 MHz e 600 MHz . Sapendo che il passo logaritmico della schiera è $\tau = 0.9$, determinare il numero e la lunghezza dei dipoli che compongono l'antenna.
8. Un'antenna parabolica ha il diametro $d = 30 \text{ cm}$ e l'efficienza dell'apertura $\epsilon_{ap} = 0.7$ a $\nu = 5 \text{ GHz}$. Si determini la sua direttività in dBi e dBd . Quanto vale l'angolo solido del fascio Ω_A .

Risposte

1. (a) L'onda si propaga in direzione $-\hat{i}$.
- (b) La velocità di fase è: $v_p = 3 \times 10^8 / \sqrt{2.56} = 1.875 \times 10^8 \text{ m/s}$.
- (c) La frequenza vale $\nu = 50 \text{ MHz}$.
- (d) $\beta = \omega/v_p = 3.1416 \times 10^8 / 1.875 \times 10^8 = 1.68 \text{ rad/m}$.
- (e) $\lambda = 2\pi/\beta$ o anche $\lambda = v_p/\nu$ da cui $\lambda = 3.75 \text{ m}$.
- (f) Il fasore campo elettrico è dato da: $\overline{E}(x) = E_0 e^{+j\beta x} \hat{z} = 1885 e^{+j1.68x} \hat{z} \text{ mV/m}$.
- (g) Il fasore campo magnetico $\overline{H}(x)$ è ottenibile da:

$$\overline{H}(x) = \frac{1}{\eta}(-\hat{i}) \times \overline{E}(x) = \frac{E(x)}{\eta}(\hat{j}) = \frac{1885}{377/1.6} e^{+j1.68x} \hat{j} = 8 e^{+j1.68x} \hat{j} \text{ mA/m}.$$

- (h) Infine il vettore di Poynting complesso è dato da:

$$\begin{aligned} \overline{S}(x) &= \frac{1}{2} \overline{E}(x) \times \overline{H}^*(x) \\ &= \frac{1}{2} 1885 e^{+j1.68x} \hat{z} \text{ mV/m} \times 8 e^{-j1.68x} \hat{j} \text{ mA/m} \\ &= -15.08 \hat{i} \text{ mW/m}^2. \end{aligned}$$

2. L'impedenza di ingresso normalizzata della linea vale:

$$z_i = -j \frac{1}{\omega C Z_0} = -j \frac{1}{2\pi \cdot 500 \times 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 75} = -j0.42.$$

Ruotando sulla Carta di Smith delle impedenze dal punto di corto circuito verso il generatore, ovvero in senso orario, fino ad incontrare la reattanza $x = -j0.42$, si percorre un arco di circonferenza di lunghezza

$$l = 0.437\lambda.$$

Essendo

$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 / 1.5}{500 \times 10^6} = 0.4 \text{ m},$$

si ottiene $l = 0.437 \cdot 0.4 = 17.48 \text{ cm}$.

Alternativamente si può risolvere l'esercizio per via analitica come segue. La costante di propagazione β vale:

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi\nu}{c/n} = \frac{2\pi \cdot 500 \times 10^6}{3 \cdot 10^8 / 1.5} = 15.71 \text{ rad/m}.$$

Per un'impedenza di ingresso di una linea in corto circuito di tipo capacitivo si può scrivere:

$$jZ_0 \tan \beta l = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$\beta l = \text{arctg}\left(-\frac{1}{\omega C Z_0}\right) = \text{arctan}\left(-\frac{1}{2\pi \cdot 500 \times 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 75}\right) = \text{arctg}(-0.42) = -0.3976 \text{ rad}.$$

La lunghezza cercata è quindi: $l = -0.3976/15.71 = -0,0253 \text{ cm}$. Il valore negativo della distanza dal corto circuito, ovvero la lunghezza dello stub, è ovviamente privo di senso ed è necessario assumere per l il complemento a $\lambda/2$ del valore suddetto:

$$l = \lambda/2 - 0.0253 = 0.4/2 - 0.0253 = 17.48 \text{ cm}.$$

3. Da S si ottiene

$$\begin{cases} Z_{max} = SZ_0 = 1.2 \cdot 100 = 120 \Omega; \\ Z_{min} = Z_0/S = 100/1.2 = 83.33 \Omega; \end{cases}$$

Le possibili impedenze caratteristiche dell'adattatore a $\lambda/4$ sono quindi:

$$Z'_{01} = \sqrt{Z_{max}Z_0} = \sqrt{120 \cdot 100} = 109.54 \Omega;$$

$$Z'_{02} = \sqrt{Z_{min}Z_0} = \sqrt{83.33 \cdot 100} = 91.29 \Omega.$$

La prima soluzione è quella che prevede $Z_{max} = 120 \Omega$, $Z_{adattatore} = 109.54 \Omega$ e $Z_0 = 100 \Omega$.
La seconda invece è quella che prevede $Z_{min} = 83.33 \Omega$, $Z_{adattatore} = 91.29 \Omega$ e $Z_0 = 100 \Omega$.

4. I dati del problema permettono di ottenere:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3};$$

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3};$$

$$T = \frac{L}{v_p} = \frac{12}{3 \cdot 10^8} = 40 \text{ ns};$$

$$V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{12 \cdot 50}{50 + 50} = 4 \text{ V}.$$

L'onda riflessa dal carico di ampiezza $V_1^- = 4(-1/3) = -1.33 \text{ V}$ viene a sua volta riflessa dal generatore, $V_2^+ = -0.44 \text{ V}$, e poi $V_2^- = 0.15 \text{ V}$. Il diagramma a rimbalzo termina dopo la seconda riflessione sul generatore ad 160 ns mentre quello della tensione è nullo fino a $t = 20 \text{ ns}$, assume il valore di 4 V fino a $t = 60 \text{ ns}$, scende a 2.7 V poi a 2.26 V e infine risale a 2.4 V tra 140 ns e 160 ns .

5. Si deve applicare la formula di Friis nella forma seguente:

$$P_R = P_T G_T G_R \cdot \frac{1}{A_0 A_S} i_{rT} i_{rR}$$

ove $i_{rT} = 1$ e $i_{rR} = \sin^2(60^\circ) = 0.75 = -1.25 \text{ dB}$. Sono inoltre noti i dati seguenti:

$$P_R = -40 \text{ dBm} = 10^{-4} \text{ mW} = 10^{-7} \text{ W}$$

$$G_R = 2 \text{ dB} = 1.585$$

$$A_S = 2.5 \text{ dB} = 1.78.$$

Ricordando che l'attenuazione isotropica vale $A_0 = (4\pi R/\lambda)^2$, si può scrivere:

$$\frac{G_T}{A_0} = \frac{D\delta}{A_0} = \frac{A_{eff}}{\lambda^2} 4\pi \delta \frac{\lambda^2}{(4\pi R)^2} = \frac{A_{eff}\delta}{4\pi R^2} = \frac{A_{geom}\epsilon_{ap}\delta}{4\pi R^2} = 3 \times 10^{-9} = -85.24 \text{ dB}.$$

Pertanto si ha:

$$P_T = \frac{P_R A_0 A_S}{G_R G_T i_{rT} i_{rR}} = \frac{10^{-7}}{1.585} \frac{1}{3 \times 10^{-9}} \frac{1.78}{1 \cdot 0.75} = 50 \text{ W} = 17 \text{ dBW} = 47 \text{ dBm}.$$

Preferendo lavorare direttamente in dB si ha:

$$P_T[\text{dBm}] = P_R[\text{dBm}] - G_R[\text{dB}] - \frac{G_T}{A_0}[\text{dB}] + A_S[\text{dB}] - i_{rR}[\text{dB}]$$

$$P_T[\text{dBm}] = -40 - 2 - (-85.24) + 2.5 - (-1.25) = 47 \text{ dBm}.$$

6. Le direzioni di zero si hanno per:

$$4\pi \sin\theta = \pi/2 \text{ da cui } \sin\theta = \frac{1}{8} \text{ e quindi } \theta = 7.2^\circ$$

$$4\pi \sin\theta = 3\pi/2 \text{ da cui } \sin\theta = \frac{3}{8} \text{ e quindi } \theta = 22^\circ.$$

$$4\pi \sin\theta = 5\pi/2 \text{ da cui } \sin\theta = \frac{5}{8} \text{ e quindi } \theta = 38.7^\circ.$$

$$4\pi \sin\theta = 7\pi/2 \text{ da cui } \sin\theta = \frac{7}{8} \text{ e quindi } \theta = 61^\circ.$$

Altre soluzioni non sono ammissibili dato che per valori dell'argomento del \cos^2 maggiori o uguali a $9\pi/2$ si ha $\cos\theta > 1$.

L'ampiezza del lobo indicato è pari a $7.2 \times 2 = 14.4^\circ$.

7. Le due frequenze che definiscono la banda di funzionamento dell'antenna sono:

$$\nu_{min} = c/(2 \cdot l_{max}) = 100 \text{ MHz}$$

$$\nu_{max} = c/(2 \cdot l_{min}) = 600 \text{ MHz}$$

da cui le due lunghezze $l_{max} = 1.5 \text{ m}$ e $l_{min} = 0.25 \text{ m}$. La relazione che lega la lunghezza dell'elemento più lungo a quella dell'elemento più corto è data da:

$$\frac{l_{min}}{l_{max}} = \tau^{N-1}.$$

Sostituendo i dati del problema si verifica che sono necessari 18 elementi. Infatti: $l_{max} = l_1 = 1.5 \text{ m}$, $l_2 = 1.35 \text{ m}$, $l_3 = 1.21 \text{ m}$, $l_4 = 1.1 \text{ m}$, $l_5 = 0.98 \text{ m}$, $l_6 = 0.88 \text{ m}$, $l_7 = 0.8 \text{ m}$, $l_8 = 0.72 \text{ m}$, $l_9 = 0.64 \text{ m}$, $l_{10} = 0.58 \text{ m}$, $l_{11} = 0.52 \text{ m}$, $l_{12} = 0.47 \text{ m}$, $l_{13} = 0.42 \text{ m}$, $l_{14} = 0.38 \text{ m}$, $l_{15} = 0.34 \text{ m}$, $l_{16} = 0.30 \text{ m}$, $l_{17} = 0.28 \text{ m}$, $l_{18} = 0.25 \text{ m}$.

8. Ricordando la relazione

$$\frac{A_{eff}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi},$$

si ha:

$$D = \frac{\pi(d/2)^2 \epsilon_{ap} 4\pi}{\lambda^2} = \frac{\pi 0.15^2 \cdot 0.7 \cdot 4\pi}{(3 \times 10^8 / 5 \times 10^9)^2} = 172.72 = 22.37 \text{ dBi}.$$

Inoltre

$$D_{dBd} = D_{dBi} - 2.14 \text{ dBi} = 22.37 \text{ dBi} - 2.14 \text{ dBi} = 20.23 \text{ dBd}.$$

Infine

$$D = 4\pi/\Omega_A \quad \Omega_A = 4\pi/172.72 = 0.073 \text{ sr}.$$