Elettromagnetismo Applicato

Prova scritta del 22 dicembre 2017

Il candidato risponda ai quesiti riportando i risultati negli appositi spazi sul secondo foglio.

1. L'espressione istantanea di un campo elettrico di un segnale che si propaga in un mezzo senza perdite avente $\varepsilon_r = 2.56$ è data da:

$$\overline{\mathcal{E}}(x,t) = 1885\, cos(3.1416 \times 10^8 t + \beta x)\hat{z}\, mV/m.$$

Si determinino nell'ordine: (a) la direzione di propagazione, (b) la velocità di fase v_p, (c) la frequenza ν, (d) la costante di fase β, (e) la lunghezza d'onda λ, (f) il fasore campo elettrico $\overline{E}(x)$, (g) il fasore campo magnetico $\overline{H}(x)$, (h) il valore del vettore di Poynting complesso $\overline{S}(x)$. Non si dimentichi di indicare sempre la direzione dei vettori e le unità di misura.

2. Una linea senza perdite a $75\,\Omega$ è costruita con un materiale isolante che ha indice di rifrazione $n = 1.5$. Se la linea è terminata su un corto circuito, quanto deve essere lunga perché la sua impedenza di ingresso sia equivalente a quella di un condensatore da $10\,pF$ alla frequenza di $500\,MHz$? Si suggerisce l'utilizzo della Carta di Smith.

3. Una linea di trasmissione con $Z_0 = 100\,\Omega$ è adattata tramite un adattatore a $\lambda/4$ inserito a distanza opportuna dal carico. Sapendo che il rapporto d'onda stazionaria della linea è $S = 1.2$ quali sono i possibili valori della impedenza caratteristica dell'adattatore?

4. Data una linea in aria senza perdite, a $50\,\Omega$, lunga $12\,m$, chiusa su un carico $Z_L = 25\,\Omega$, si disegni il diagramma a rimbalzo per la tensione $V(z,t)$ e l'andamento della tensione nel tempo fino a $160\,ns$ in corrispondenza della sezione $z = 6\,m$ supponendo la linea alimentata da un gradino di tensione applicato in $t = 0$ da un generatore con $V_g = 12\,V$ e $Z_g = 100\,\Omega$.

5. Un ponte radio tra due antenne è soggetto ad una attenuazione supplementare di $2.5\,dB$. L'antenna trasmittente è una parabola di diametro pari a $50\,cm$, rendimento $\delta = 0.9$ ed efficienza dell'apertura $\varepsilon_{ap} = 0.85$. L'antenna ricevente è un dipolo corto avente guadagno pari a $2\,dB$, sensibilità pari a $-40\,dBm$ ed è disallineato di $30°$ rispetto alla direzione di massima ricezione. Si determini la minima potenza che si deve trasmettere in modo da garantire il collegamento fino a una distanza $R = 2\,km$.

6. Si determino le direzioni di zero e l'ampiezza del lobo che comprende la direzione $\theta = 0°$ di un semidipolo perpendicolare ad un piano conduttore che presenta la seguente intensità di radiazione normalizzata, definita nel semispazio $0 \leq \theta \leq \pi/2$: $i_r = cos^2(4\pi\, sin\theta)$.

7. Si consideri un'antenna log-periodica costituita da dipoli a $\lambda/2$ operante nella banda di frequenza tra $100\,MHz$ e $600\,MHz$. Sapendo che il passo logaritmico della schiera è $\tau = 0.9$, determinare il numero e la lunghezza dei dipoli che compongono l'antenna.

8. Un'antenna parabolica ha il diametro $d = 30\,cm$ e l'efficienza dell'apertura $\varepsilon_{ap} = 0.7$ a $\nu = 5\,GHz$. Si determini la sua direttività in dBi e dBd. Quanto vale l'angolo solido del fascio Ω_A.

Risposte

1. (a) L'onda si propaga in direzione $-\hat{\imath}$.
(b) La velocità di fase è: $v_p = 3 \times 10^8 \,/\, \sqrt{2.56} = 1.875 \times 10^8\, m/s$.
(c) La frequenza vale $\nu = 50\, MHz$.
(d) $\beta = \omega/v_p = 3.1416 \times 10^8 \,/\, 1.875 \times 10^8 = 1.68\, rad/m$.
(e) $\lambda = 2\pi/\beta$ o anche $\lambda = v_p/\nu$ da cui $\lambda = 3.75\, m$.
(f) Il fasore campo elettrico è dato da: $\overline{E}(x) = E_0\, e^{+j\beta x}\hat{z} = 1885\, e^{+j1.68\,x}\hat{z}\, mV/m$.
(g) Il fasore campo magnetico $\overline{H}(x)$ è ottenibile da:

$$\overline{H}(x) = \frac{1}{\eta}(-\hat{\imath}) \times \overline{E}(x) = \frac{E(x)}{\eta}(\hat{\jmath}) = \frac{1885}{377/1.6} e^{+j1.68\,x}\hat{\jmath} = 8\, e^{+j1.68\,x}\hat{\jmath}\ mA/m.$$

(h) Infine il vettore di Poynting complesso è dato da:

$$\begin{aligned} \overline{S}(x) &= \frac{1}{2}\,\overline{E}(x) \times \overline{H}^*(x) \\ &= \frac{1}{2}\, 1885\, e^{+j1.68\,x}\hat{z}\, mV/m \ \times\ 8\, e^{-j1.68\,x}\hat{\jmath}\ mA/m \\ &= -7.54\,\hat{\imath}\ mW/m^2. \end{aligned}$$

2. L'impedenza di ingresso normalizzata della linea vale:

$$z_i = -j\frac{1}{\omega C\, Z_0} = -j\frac{1}{2\pi\, 500 \times 10^6\, 10 \cdot 10^{-12} \cdot 75} = -j0.42.$$

Ruotando sulla Carta di Smith delle impedenze dal punto di corto circuito verso il generatore, ovvero in senso orario, fino ad incontrare la reattanza $x = -j0.42$, si percorre un arco di circonferenza di lunghezza

$$l = 0.437\lambda.$$

Essendo

$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8/1.5}{500 \times 10^6} = 0.4\, m,$$

si ottiene $l = 0.437 \cdot 0.4 = 17.48\, cm$.
Alternativamente si può risolvere l'esercizio per via analitica come segue. La costante di propagazione β vale:

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi\nu}{c/n} = \frac{2\pi\, 500 \times 10^6}{3 \cdot 10^8/1.5} = 15.71\ rad/m.$$

Per un'impedenza di ingresso di una linea in corto circuito di tipo capacitivo si può scrivere:

$$jZ_0 tan\beta l = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$\beta l = arctg(-\frac{1}{\omega\, C\, Z_0}) = arctan(-\frac{1}{2\pi\, 500 \times 10^6\, 10 \cdot 10^{-12} \cdot 75}) = arctg(-0.42) = -0.3976\ rad.$$

La lunghezza cercata è quindi: $l = -0.3976/15.71 = -0,0253\ cm$. Il valore negativo della distanza dal corto circuito, ovvero la lunghezza dello stub, è ovviamente privo di senso ed è necessario assumere per l il complemento a $\lambda/2$ del valore suddetto:

$$l = \lambda/2 - 0.0253 = 0.4/2 - 0.0253 = 17.48\, cm.$$

3. Da S si ottiene

$$\begin{cases} Z_{max} = SZ_0 = 1.2 \cdot 100 = 120\,\Omega; \\ Z_{min} = Z_0/S = 100/1.2 = 83.33\,\Omega; \end{cases}$$

Le possibili impedenze caratteristiche dell'adattatore a $\lambda/4$ sono quindi:

$$\begin{aligned} Z'_{01} = \sqrt{Z_{max} Z_0} &= \sqrt{120 \cdot 100} = 109.54\,\Omega; \\ Z'_{02} = \sqrt{Z_{min} Z_0} &= \sqrt{83.33 \cdot 100} = 91.29\,\Omega. \end{aligned}$$

La prima soluzione è quella che prevede $Z_{max} = 120\,\Omega$, $Z_{adattatore} = 109.54\,\Omega$ e $Z_0 = 100\,\Omega$.
La seconda invece è quella che prevede $Z_{min} = 83.33\,\Omega$, $Z_{adattatore} = 91.29\,\Omega$ e $Z_0 = 100\,\Omega$.

4. I dati del problema permettono di ottenere:

$$\varrho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3};$$

$$\varrho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3};$$

$$T = \frac{L}{v_p} = \frac{12}{3 \cdot 10^8} = 40\,ns;$$

$$V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{12 \cdot 50}{50 + 50} = 4\,V.$$

L'onda riflessa dal carico di ampiezza $V_1^- = 4\,(-1/3) = -1.33\,V$ viene a sua volta riflessa dal generatore, $V_2^+ = -0.44\,V$, e poi $V_2^- = 0.15\,V$. Il diagramma a rimbalzo termina dopo la seconda riflessione sul generatore ad $160\,ns$ mentre quello della tensione è nullo fino a $t = 20\,ns$, assume il valore di $4\,V$ fino a $t = 60\,ns$, scende a $2.7\,V$ poi a $2.26\,V$ e infine risale a $2.4\,V$ tra $140\,ns$ e $160\,ns$.

5. Si deve applicare la formula di Friis nella forma seguente:

$$P_R = P_T G_T G_R \cdot \frac{1}{A_0 A_S} i_{rT} i_{rR}$$

ove $i_{rT} = 1$ e $i_{rR} = sin^2(60°) = 0.75 = -1.25\,dB$. Sono inoltre noti i dati seguenti:

$$\begin{aligned} P_R &= -40\,dBm = 10^{-4}\,mW = 10^{-7}\,W \\ G_R &= 2\,dB = 1.585 \\ A_S &= 2.5\,dB = 1.78. \end{aligned}$$

Ricordando che l'attenuazione isotropica vale $A_0 = (4\pi R/\lambda)^2$, si può scrivere:

$$\frac{G_T}{A_0} = \frac{D\delta}{A_0} = \frac{A_{eff}}{\lambda^2} 4\pi\,\delta \frac{\lambda^2}{(4\pi R)^2} = \frac{A_{eff}\delta}{4\pi R^2} = \frac{A_{geom}\varepsilon_{ap}\,\delta}{4\pi R^2} = 3 \times 10^{-9} = -85.24\,dB.$$

Pertanto si ha:

$$P_T = \frac{P_R}{G_R} \frac{A_0}{G_T} \frac{A_S}{i_{rT} i_{rR}} = \frac{10^{-7}}{1.585} \frac{1}{3 \times 10^{-9}} \frac{1.78}{1 \cdot 0.75} = 50\,W = 17\,dBW = 47\,dBm.$$

Preferendo lavorare direttamente in dB si ha:

$$P_T[dBm] = P_R[dBm] - G_R[dB] - \frac{G_T}{A_0}[dB] + A_S[dB] - i_{rR}[dB]$$

$$P_T[dBm] = -40 - 2 - (-85.24) + 2.5 - (-1.25) = 47\,dBm.$$

6. Le direzioni di zero si hanno per:
$4\pi\, sin\theta = \pi/2$ da cui $sin\theta = \frac{1}{8}$ e quindi $\theta = 7.2°$
$4\pi\, sin\theta = 3\pi/2$ da cui $sin\theta = \frac{3}{8}$ e quindi $\theta = 22°$.
$4\pi\, sin\theta = 5\pi/2$ da cui $sin\theta = \frac{5}{8}$ e quindi $\theta = 38.7°$.
$4\pi\, sin\theta = 7\pi/2$ da cui $sin\theta = \frac{7}{8}$ e quindi $\theta = 61°$.
Altre soluzioni non sono ammissibili dato che per valori dell'argomento del cos^2 maggiori o uguali a $9\pi/2$ si ha $cos\theta > 1$.
L'ampiezza del lobo indicato è pari a $7.2 \times 2 = 14.4°$.

7. Le due frequenze che definiscono la banda di funzionamento dell'antenna sono:

$$\nu_{min} = c/(2 \cdot l_{max}) = 100\, MHz$$

$$\nu_{max} = c/(2 \cdot l_{min}) = 600\, MHz$$

da cui le due lunghezze $l_{max} = 1.5\, m$ e $l_{min} = 0.25\, m$. La relazione che lega la lunghezza dell'elemento più lungo a quella dell'elemento più corto è data da:

$$\frac{l_{min}}{l_{max}} = \tau^{N-1}.$$

Sostituendo i dati del problema si verifica che sono necessari 18 elementi. Infatti: $l_{max} = l_1 = 1.5\, m$, $l_2 = 1.35\, m$, $l_3 = 1.21\, m$, $l_4 = 1.1\, m$, $l_5 = 0.98\, m$, $l_6 = 0.88\, m$, $l_7 = 0.8\, m$, $l_8 = 0.72\, m$, $l_9 = 0.64\, m$, $l_{10} = 0.58\, m$ $l_{11} = 0.52\, m$, $l_{12} = 0.47\, m$, $l_{13} = 0.42\, m$, $l_{14} = 0.38\, m$, $l_{15} = 0.34\, m$, $l_{16} = 0.30\, m$, $l_{17} = 0.28\, m$, $l_{18} = 0.25\, m$.

8. Ricordando la relazione

$$\frac{A_{eff}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi},$$

si ha:

$$D = \frac{\pi (d/2)^2 \varepsilon_{ap}\, 4\pi}{\lambda^2} = \frac{\pi 0.15^2 \cdot 0.7 \cdot 4\pi}{(3 \times 10^8 / 5 \times 10^9)^2} = 172.72 = 22.37\, dBi.$$

Inoltre

$$D_{dBd} = D_{dBi} - 2.14\, dBi = 22.37\, dBi - 2.14\, dBi = 20.23\, dBd.$$

Infine

$$D = 4\pi/\Omega_A \quad \Omega_A = 4\pi/172.72 = 0.073\, sr.$$