Elettromagnetismo Applicato

Prova scritta del 29 gennaio 2019

1. Si consideri una linea di trasmissione senza perdite con $Z_0 = 50\Omega$ chiusa su un'impedenza di carico $Z_L = (100 - j50)\Omega$. Si trovi $Z_i(l)$ ad una distanza $l = 0.1\,\lambda$ dal carico. Si consiglia l'utilizzo della Carta di Smith.

2. Il vettore complesso rappresentativo del campo elettrico in un mezzo dielettrico omogeneo è: $\overline{E}(z) = 1.5\ e^{-0.5z}\ e^{-j0.628z}\ \hat{j}\ V/m$. Sapendo che la frequenza dell'onda è 5 MHz, calcolare: (a) la velocità di propagazione; (b) il vettore complesso rappresentativo del campo magnetico; (c) l'ampiezza del campo elettrico e del campo magnetico dopo una propagazione di $100\,m$.

3. Una linea di trasmissione di impedenza caratteristica 50 Ω è chiusa su un carico sconosciuto. Sapendo che la distanza tra due minimi di tensione consecutivi lungo la linea è pari a 15 cm, che la distanza dalla sezione di carico del primo minimo di tensione è di 10 cm e che il rapporto d'onda stazionaria vale 5, calcolare: (a) la lunghezza d'onda di lavoro; (b) il coefficiente di riflessione al carico; (c) le condizioni di adattamento con un adattatore $\lambda/4$. Si consiglia l'utilizzo della carta di Smith.

4. Una linea di trasmissione supposta senza perdite è costitutita da un cavo coassiale il cui conduttore interno ha un diametro di $1\,mm$ e il materiale isolante in teflon ha $\varepsilon_r = 2.1$ e spessore di $1\,mm$. Ricordando che la capacità per unità di lunghezza vale $C = 2\pi\varepsilon/(ln\frac{b}{a})$, con a e b rispettivamente i raggi del conduttore interno ed esterno, si calcoli (a) la velocità di propagazione v_p e (b) l'impedenza caratteristica Z_0.

5. Un'antenna senza perdite ha la seguente intensità di radiazione:

$$I_r(\theta) = I_0\ cos^3(\theta)\ W/sr \quad 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \phi < 2\pi$$

   con $I_0 = 6.37\,W/sr$. Si calcolino: (a) la potenza irradiata ottenuta dall'integrazione di I_r[1]; (b) la direzione di massima radiazione; (c) l'HPBW sul piano zenitale.

6. La torre di controllo di un piccolo aeroporto dispone di un radar realizzato con un'antenna parabolica di diametro equivalente pari a 4 m, che opera ad una frequenza di 2 GHz con un rendimento di 0.8. Per garantire la sicurezza del traffico aereo è necessario poter individuare aeromobili con sezione radar di 20 m^2 a una distanza minima di 10 km. Se la sensibilità del ricevitore a terra è pari a $-50\,dBm$, si calcolino: (a) La minima potenza che deve essere emessa dal radar per garantire la sicurezza; (b) la massima distanza a cui il sistema è in grado di individuare un oggetto con sezione radar di 3 m^2.

7. Un'antenna parabolica ha il diametro $d = 30\,cm$ e l'efficienza dell'apertura $\varepsilon_{ap} = 0.95$ alla frequenza $\nu = 36\,GHz$. Si determini la sua direttività in dBi e dBd.

8. Se la densità di potenza irradiata da un dipolo $\lambda/2$ è:

$$S(r,\theta) = \frac{15 I_0^2}{\pi r^2}\left[\frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta}\right]$$

   e assume il suo valore massimo $S_{max} = 50\,nW/m^2$ ad una distanza di $1km$, quale è il valore della corrente I_0?

---

[1] Si rammenti la regola di integrazione:

$$\int [(f(x)]^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C \qquad con\ n \neq -1$$

Risposte

1. Si trovi l'impedenza di carico normalizzata: $z_L = 2 - j$. In corrispondenza di tale punto sulla ghiera della carta di Smith si legge il valore di $0.287\,\lambda$. Si descriva ora il cerchio a $|\varrho|$ costante e muovendosi verso il generatore di $l = 0.1\,\lambda$ si ha $0.287\lambda + 0.1\lambda = 0.387\lambda$. Unendo il centro della carta di Smith con il punto sulla ghiera di valore 0.387λ si identifica un nuovo punto in corrispondenza del quale si legge il valore dell'impedenza di ingresso: $z_i = 0.6 - j0.66$ ovvero $Z_i = (30 - j33)\,\Omega$.

2. (a) Dai dati del problema si ricava immediatamente $\beta = 0.628$, da cui:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.628} = 10\ m \\ v_p &= \lambda\nu = 10 \cdot 5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^7\ m/s \end{aligned}$$

(b) L'indice di rifrazione del mezzo in cui l'onda si propaga vale:

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6} = 6$$

pertanto l'impedenza intrinseca del mezzo è $\eta = \eta_0/n = 377/6 = 62.83\ \Omega$. Si ricava quindi il vettore complesso rappresentativo del campo magnetico:

$$\begin{aligned} \overline{H}(z) &= \frac{1}{\eta}\hat{z} \times \overline{E}(z) \\ &= (15.9 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5) \cdot e^{-0.5z} e^{-j0.628z} \hat{z} \times \hat{j} \\ &= 24 \cdot e^{-0.5z} e^{-j0.628z} (-\hat{i}) \quad mA/m. \end{aligned}$$

(c) Dopo una propagazione di $100\,m$ si ha:

$$E(z = 100) = 1.5 \cdot e^{-0.5 \cdot 100} = 2.9 \cdot 10^{-22}\,V/m,$$

$$H(z = 100) = 24 \cdot e^{-0.5 \cdot 100} = 4.6 \cdot 10^{-21}\,mA/m.$$

3. (a) La distanza tra due minimi di tensione è pari a mezza lunghezza d'onda, pertanto $\lambda = 30$ cm.
(b) Il modulo del coefficiente di riflessione si ricava dal ROS:

$$|\rho| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{4}{6} = 0.667$$

mentre la fase di ρ al carico, ϕ_L, si ottiene dalla posizione del primo minimo di tensione sulla linea, e vale:

$$\phi_L = -2\beta l_{min} - \pi = -2\frac{2\pi}{\lambda} l_{min} - \pi = -2\frac{2\pi}{30}(-10) - \pi = \frac{\pi}{3}$$

da cui:

$$\rho_L = 0.667 e^{j\frac{\pi}{3}} = 0.333 + j0.574$$

(c) Sulla carta di Smith, la circonferenza a $|\rho|$ costante interseca l'asse delle impedenze reali in $z_{max} = 5$ e $z_{min} = 0.2$, rispettivamente alle distanze $d_{max} = 10\ cm - \lambda/4 = 2.5\ cm$ e $d_{min} = 10\ cm$ dal carico. L'adattamento è pertanto ottenuto con:

- una rete $\lambda/4$ di impedenza $\sqrt{5 \cdot 50 \cdot 50} = 111.8\ \Omega$ posta a 2.5 cm dal carico, oppure
- una rete $\lambda/4$ di impedenza $\sqrt{0.2 \cdot 50 \cdot 50} = 22.4\ \Omega$ posta a 10 cm dal carico.

4. (a) La velocità di propagazione è esprimibile come: $v_p = 3 \times 10^8/\sqrt{2.1} = 2.1 \times 10^8\, m/s$.
(b) L'impedenza intrinseca vale $Z_0 = \sqrt{L/C}$ e quindi, ricordando le le espressioni di C ed L, si ottiene:
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{1}{(2\pi)^2}\, ln^2\Big(\frac{b}{a}\Big)} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\, ln\Big(\frac{b}{a}\Big) = \frac{60}{\sqrt{2.1}}\, ln\Big(\frac{1.5}{0.5}\Big) = 45\,\Omega.$$
Alternativamente, calcolato $C = 0.106 \times 10^{-9}\, F/m$, ricordando che $LC = \mu\varepsilon$, si ha:
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{C^2}} = \frac{1}{v_p \cdot C} = \frac{1}{2.1 \times 10^8 \cdot 0.106 \times 10^{-9}} = 45\,\Omega.$$

5. (a) La potenza totale irradiata dall'antenna si ottiene integrando la densità di potenza:
$$\begin{aligned} P &= \int_0^{4\pi} I_0 cos^3\theta \; d\Omega = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} I_0 cos^3\theta sin\theta \; d\theta d\varphi = \\ &= I_0 \int_0^{\pi/2} cos^3\theta sin\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi I_0 \left[\frac{cos^4\theta}{4}\right]_0^{pi/2} = \frac{\pi I_0}{2}. \end{aligned}$$
Essendo $I_0 = 6.37\, W/sr$, si ricava immediatamente $P = 10$ W.
(b) La direzione di massima radiazione si ha per $\theta = 0$.
(c) L'HPBW è delimitato dalla condizione $I(\theta_H) = cos^3\theta_H = 0.5$, ossia
$$cos\theta_H = 0.79 \Rightarrow \theta_H = arccos(0.79) = 0.66\, rad$$
Per simmetria $HPBW = 2\theta_H = 1.32\, rad = 75.6°$.

6. (a) La minima potenza che deve essere trasmessa si ottiene invertendo la formula del radar:
$$P_{T,min} = \frac{P_{R,min}(4\pi)^3 R^4}{G_T G_R \lambda^2 \sigma_T}$$
dai dati forniti si ricavano λ, G_T e G_R:
$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^9} = 0.15\; m \\ G_T = G_R &= \xi\frac{4\pi A_{eff}}{\lambda^2} = \frac{0.8\cdot 4\pi(\pi 2^2)}{0.15^2} = 5614 \end{aligned}$$
sostituendo:
$$P_{T,min} = \frac{10^{-8}\cdot(4\pi)^3\cdot(10\cdot 10^3)^4}{5614^2\cdot 0.15^2\cdot 20} = 13989\; W \;\approx\; 14\; kW.$$
(b) La massima distanza a cui è possibile individuare un oggetto di sezione radar $3\,m^2$ si ottiene invertendo nuovamente la formula del radar:
$$R_{max} = \left[\frac{P_T G_T G_R \lambda^2 \sigma_T}{(4\pi)^3 P_{R,min}}\right]^{1/4} = \left[\frac{14\cdot 10^3\cdot(5614)^2\cdot(0.15)^2\cdot 3}{(4\pi)^3\cdot 10^{-8}}\right]^{1/4} = 6225\; m$$

7. Dalla relazione
$$\frac{A_{eff}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi}, \quad D = \frac{A_{eff}\,4\pi}{\lambda^2}$$
si ha:
$$D = \frac{\pi(d/2)^2\varepsilon_{ap}\,4\pi}{\lambda^2} = \frac{\pi 0.15^2\cdot 0.95\cdot 4\pi}{(3\times 10^8/36\times 10^9)^2} = 12152 = 40.84\,dBi.$$
Infine
$$D_{dBd} = D_{dBi} - 2.14\,dBi = 40.84\,dBi - 2.14\,dBi = 38.7\,dBd.$$

8. Il valore S_{max} si ha per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e vale $S_{max} = 15 I_0^2/\pi r^2$ da cui
$$I_0^2 = \frac{\pi r^2}{15}\cdot S_{max} = \frac{\pi\cdot 10^6}{15}\cdot 50\times 10^{-9} = 0.010472\, A^2$$
e infine:
$$I_0 = 0.102\, A.$$